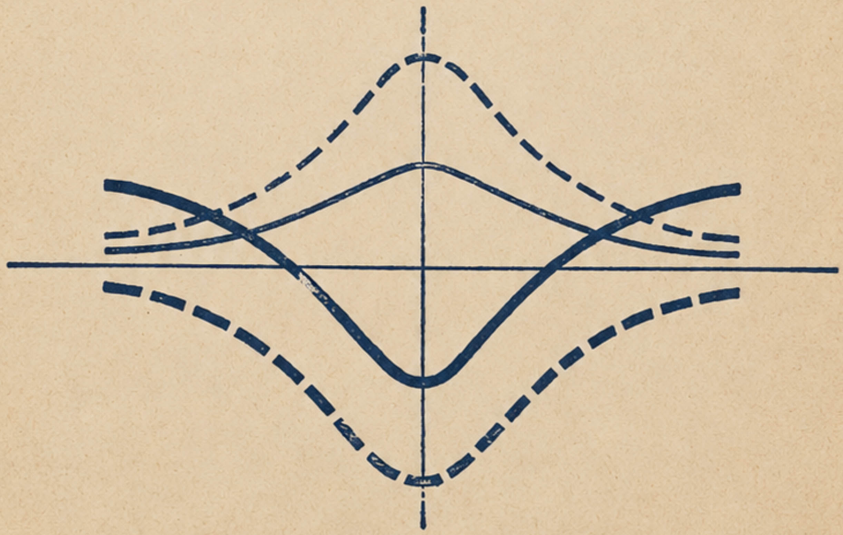
С. П. НОВОСЕЛОВ

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

УЧЕБНИК
ДЛЯ УЧИТЕЛЬСКИХ
ИНСТИТУТОВ



УЧПЕДГИЗ · 1950

С. И. НОВОСЕЛОВ

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

УЧЕБНИК
ДЛЯ УЧИТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТОВ

2-е ПЕРЕРАБОТАННОЕ ИЗДАНИЕ

Утвержден
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1950

Редактор *П. С. Моденов.* Техн. редактор *Н. Н. Махова*

Подписано к печати 5/VI 1950 г. А 02882. Бумага 60 × 92¹/₁₆. Бум. л. 12,13. Печ. л. 24,25. Уч.-изд. л. 24,73. Тираж 35 000 экз. Цена без переплёта 8 р. 65 к. Переплёт 90 к. Заказ № 2853.

Набрано и сматрицировано в Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано в 3-й типографии «Красный пролетарий» Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Краснопролетарская, 16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть I

АЛГЕБРА

Глава I. Поле рациональных чисел

Стр.

§ 1. Введение отрицательных чисел 5
§ 2. Рациональные числа 11
§ 3. Сравнение рациональных чисел 12
§ 4. Арифметические действия над рациональными числами 14
§ 5. Правила действий над рациональными числами 24
§ 6. Числовые кольца и поля 26
§ 7. Скалярные свойства действий 28

Глава II. Рациональные функции

§ 8. Общие понятия 29
§ 9. Рациональные выражения 32
§ 10. Теорема о тождественности двух многочленов 36
§ 11. Кольцо многочленов 38
§ 12. Делимость многочленов 40
§ 13. Деление с остатком 42
§ 14. Деление на $x-a$ 44
§ 15. Корни многочлена 45
§ 16. Нахождение целых корней многочлена 49
§ 17. Нахождение рациональных корней многочлена 51
§ 18. Наибольший общий делитель двух многочленов 52
§ 19. Разложение многочлена на неприводимые множители 55
§ 20. Многочлены с несколькими аргументами 58
§ 21. Частные приемы разложения многочленов на множители 61
§ 22. Поле рациональных функций 64

Глава III. Системы линейных уравнений

§ 23. Общие понятия 73
§ 24. Система уравнений с двумя неизвестными 74
§ 25. Детерминанты 2-го порядка 75
§ 26. Правило Крамера 76
§ 27. Свойства детерминантов 2-го порядка 77
§ 28. Исследование системы двух уравнений с двумя неизвестными . . —
§ 29. Детерминанты 3-го порядка 78
§ 30. Свойства детерминантов 3-го порядка 80
§ 31. Решение и исследование системы 3 линейных уравнений с тремя неизвестными 84
§ 32. Однородные системы 88
§ 33. Элементарные методы решения линейных систем 89

Глава IV. Поле действительных чисел

§ 34. Основные понятия 94
§ 35. Десятичное измерение отрезков 99
§ 36. Положительные действительные числа 101
§ 37. Отрицательные действительные числа 102
§ 38. Сравнение действительных чисел 103
§ 39. Аппроксимация (приближение) иррациональных чисел рациональными 105
§ 40. Плотность множества действительных чисел 106
§ 41. Теоремы о возрастающих и убывающих последовательностях . . 108
§ 42. Арифметические действия над действительными числами 111
§ 43. Множество действительных чисел как числовое поле 118
§ 44. Извлечение корня 122
§ 45. Примеры промежуточных полей 124
§ 46. Многочлены, рациональные функции и линейные уравнения с действительными коэффициентами 126
§ 47. Корни многочлена в поле действительных чисел 127
§ 48. Радикалы и действия над ними 130
§ 49. Иррациональные выражения 132
§ 50. Счетные множества 137
§ 51. Несчетность множества всех действительных чисел 140

Глава V. Поле комплексных чисел

§ 52. Основные понятия и определения 141
§ 53. Геометрическое изображение комплексных чисел 147
§ 54. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами. Формула Моавра 151
§ 55. Извлечение корня 156
§ 56. Алгебраические функции и линейные уравнения 160
§ 57. Основная теорема алгебры 161
§ 58. Разложение многочлена на линейные множители . . . . . —
§ 59. Многочлены с действительными коэффициентами 165
§ 60. Связь коэффициентов многочлена с корнями 169
§ 61. Преобразование уравнений 172
§ 62. Эквивалентность уравнений 174
§ 63. Уравнения 2-й и 3-й степеней 177
§ 64. Задача о разрешимости уравнений в радикалах. Двучленные уравнения 181
§ 65. Частные приемы решения уравнений 184
§ 66. Понятие о проблеме исключения 192
§ 67. Частные приемы решения систем уравнений высших степеней . . 196
§ 68. Понятие о решении иррациональных уравнений 201

Глава VI. Неравенства

§ 69. Основные теоремы 204
§ 70. Задание числовых и точечных множеств при помощи неравенств . 206
§ 71. Решение неравенств 211
§ 72. Неравенства 1-й степени с одним неизвестным 212
§ 73. Неравенства высших степеней с одним неизвестным 215
§ 74. Примеры решения неравенств с несколькими неизвестными . . . 220
§ 75. Неравенства, содержащие абсолютную величину 224
§ 76. Доказательство неравенств 226
§ 77. Некоторые замечательные неравенства 227
§ 78. Примеры на отыскание наибольших и наименьших значений . . 233

Глава VII. Аксиоматический метод в алгебре

§ 79. Общие понятия 236
§ 80. Аксиомы кольца и их следствия 238
§ 81. Понятие поля 244
§ 82. Изоморфизм колец и полей . . . . .

Часть II

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 83. Общие понятия 249

Глава VIII. **Степенная, показательная и логарифмическая функции**

§ 84. Обобщение понятия степени 254
§ 85. Степенная функция с рациональным показателем 256
§ 86. Показательная функция на множестве рациональных чисел 262
§ 87. Степень с иррациональным показателем 265
§ 88. Показательная функция 266
§ 89. Логарифмы и их свойства 269
§ 90. Логарифмическая функция 273

Глава IX. **Тригонометрические функции**

§ 91. Изображение действительных чисел точками окружности 274
§ 92. Тригонометрические функции произвольного угла 277
§ 93. Тригонометрические функции числового аргумента 281
§ 94. Соотношения между тригонометрическими функциями 283
§ 95. Основные свойства тригонометрических функций 285
§ 96. Формулы приведения 288
§ 97. Промежутки монотонности тригонометрических функций 291
§ 98. Графики тригонометрических функций 295
§ 99. Параметрические уравнения окружности, гармонические колебания 298
§ 100. Теорема о проекции вектора на ось 300
§ 101. Теоремы сложения 302
§ 102. Следствия теорем сложения 304
§ 103. Рационализирующие подстановки 311
§ 104. Простейшие неравенства, содержащие аргумент и тригонометрические функции и их применения 315

Глава X. **Обратные тригонометрические функции**

§ 105. Основные обратные тригонометрические функции 319
§ 106. Тригонометрические операции над аркфункциями 324
§ 107. Соотношение между аркфункциями 327

Глава XI. **Исследование элементарных функций**

§ 108. Элементарные функции 332
§ 109. Классификация элементарных функций 337
§ 110. Исследование функций элементарными средствами 340
§ 111. Построение графиков элементарных функций 342
§ 112. Применение простейших преобразований к построению графиков 347
§ 113. Примеры построения графиков элементарных функций 353

Глава XII. **Элементарные трансцендентные уравнения**

§ 114. Элементарные трансцендентные уравнения 362
§ 115. Простейшие трансцендентные уравнения 363
§ 116. Различные частные приемы решения трансцендентных уравнений 365
§ 117. Особые случаи решения уравнений 377
§ 118. Понятие о графических и приближенных методах решения уравнений 379

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначается в качестве учебника для физико-математических факультетов учительских институтов.

Первая часть книги (в соответствии с программой) содержит изложение вопросов элементарной алгебры, имеющих принципиальное значение и являющихся наиболее актуальными для учителя. В этот же раздел включаются и некоторые сведения, излагаемые обычно в курсе высшей алгебры, — это обусловлено тем, что в учительских институтах высшая алгебра не изучается в качестве самостоятельного предмета.

Многие важнейшие понятия современной алгебры (например, кольцо, поле, изоморфизм) просты, легко поддаются элементарному изложению и вместе с тем способствуют ясному пониманию научного содержания школьного курса алгебры. Я старался достичь естественной увязки основных понятий современной алгебры с материалом школьного курса.

В основу первой части положена моя книга „Алгебра" (учебник для учительских институтов, Учпедгиз, 1947). В соответствии с современной программой, главы, посвященные исследованию степенной, показательной и логарифмической функций, перенесены из алгебры во вторую часть, а в алгебру включена новая глава „Аксиоматический метод в алгебре".

Вторая часть посвящена систематическому изучению элементарных функций. По ныне действующей программе учительских институтов тригонометрия не должна изучаться как самостоятельный учебный предмет. Тригонометрические функции изучаются в разделе „Элементарные функции" наряду с прочими элементарными функциями, а вопросы, связанные с вычислением элементов геометрических фигур, отнесены к геометрии. *Такая структура курса абсолютно неприемлема для средней школы.* Для первоначального изучения тригонометрических функций, и их приложений к геометрии естественно выделение соответствующего комплекса сведений в специальную дисциплину (тригонометрия). Однако для студентов учительских институтов, уже прошедших школьный курс математики, эта структура курса является целесообразной. Для будущего педагога важно знать в стройной системе учение об элементарных функциях, с которыми имеет дело школьная математика. Заметим, что материал второй части настоящей книги и принятая в ней система изложения могут быть приняты за основу при проведении обзорных занятий в X классе.

Как программой, так и настоящим учебником уделяется большое внимание вопросу об *исследовании функций элементарными средствами.* Мы считаем глубоко ошибочной точку зрения, согласно которой вопрос об исследовании функций не должен включаться в курс „элементарной математики", поскольку „высшая математика" дает совершенные средства для выполнения этого исследования. Дело в том, что *многие понятия, связанные с исследованием функций* (например, монотонность, наибольшие и наименьшие значения), *не находятся в зависимости от дифференциального исчисления, которое дает лишь мощные средства выполнения этого исследования.* Естественно, что знакомство с предметом исследования должно предшествовать изучению средств его выполнения. Выяснить основные понятия, связанные с исследованием функций, вполне возможно (не вдаваясь, разу-

меется, в искусственность и кустарщину) в рамках школьного курса. *Именно это является важным, а вовсе не введение элементов дифференциального и интегрального исчислений в школьную программу.* Более того, весьма сомнительно, чтобы можно было успешно применять методы математического анализа, не владея навыками в исследовании функций непосредственно на основе их определения. Элементарные функции составляют класс функций весьма важный как в математике, так и в ее приложениях, и навыками в непосредственном исследовании этих функций и построении их графиков должен обладать каждый учитель.

В связи с замечаниями, поступившими от ряда читателей первого издания учебников для учительских институтов, я считаю необходимым разъяснить следующее:

во-первых, настоящая книга вовсе не носит характер „универсального руководства", а является лишь составной частью в серии учебников, предназначенных специально для учительских институтов;

во-вторых, книга рассчитана на лиц, знакомых с математикой в объеме средней школы.

По указанным причинам ряд понятий автор вправе считать известными. Так, например, понятия последовательности или предела функции изложены в учебнике высшей математики, в котором учащийся и найдет соответствующие определения.

После выхода в свет первого издания учебников по элементарной математике мною было получено большое число писем от читателей, в которых высказывались различные соображения и пожелания относительно текста, указывались отдельные погрешности и неудачные места. Эти замечания читателей оказали мне помощь в подготовке настоящего издания книги. *Всем читателям, поделившимся со мной своими замечаниями, выражаю глубокую благодарность.*

Пользуюсь случаем выразить благодарность следующим лицам: Л. Я Окуневу, П. С. Моденову, Б. В. Кутузову, С. В. Филичеву, оказавшим мне помощь ценными советами и указаниями при работе над предыдущим и настоящим изданиями учебника, а также и А. И. Маркушевичу за некоторые высказанные им полезные замечания. Выражаю благодарность Н. А. Меделяновскому за выполненную работу по изготовлению иллюстраций к книге.

Москва
16 февраля 1950 г.

С. Новоселов.

ЧАСТЬ I

АЛГЕБРА

Глава I

ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Введение отрицательных чисел

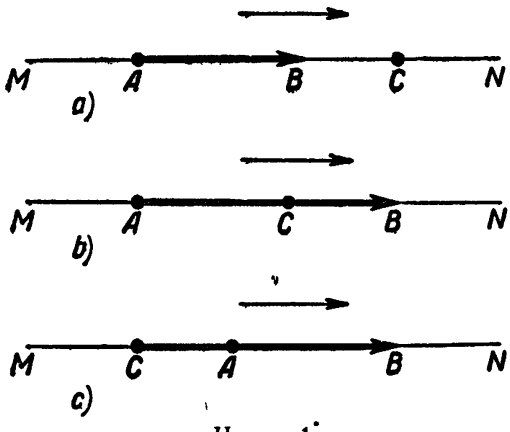
Как известно из арифметики, понятие натурального числа, возникающее первоначально в результате счета отдельных предметов, в дальнейшем подвергается расширению. Именно, вводится нуль как число, характеризующее отсутствие предметов, а затем дробные числа, необходимые для измерения величин, делимых на части.

В элементарной арифметике рассматриваются натуральные числа 1, 2, 3, ..., число 0 и дробные числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n целые числа и $n \neq 0$. Все эти числа, за исключением нуля, будем называть положительными рациональными числами. Таким образом, множество всех чисел, известных из арифметики, состоит из положительных чисел и нуля. Из всех этих чисел нуль является наименьшим. Поэтому неравенство $k > 0$ употребляется для символической записи утверждения, что k есть положительное число.

Дальнейшее расширение понятия числа связано с потребностью измерения направленных величин, т. е. величин, *вполне характеризующихся не только числовым значением, но и направлением.* Мы будем рассматривать направленные величины частного вида, для которых следует различать только два противоположные направления. Примерами таких величин могут служить путь, пройденный телом при прямолинейном движении, отрезок, расположенный на данной прямой, температура, отсчитываемая по шкале термометра вверх и вниз от точки замерзания воды, время, отсчитываемое от некоторого момента в будущее и в прошедшее. Увеличение и уменьшение некоторой величины можно рассматривать как ее изменение в двух противоположных направлениях (например, повышение и понижение температуры, доход и расход и т. п.).

Условимся для измерения некоторой величины, отсчитываемой *в данном фиксированном направлении,* пользоваться известными из арифметики числами. Тогда возникает потребность в расширении понятия числа путем введения новых чисел, характеризующих результат измерения величины, отсчитываемой *в противоположном направлении.*

Рассмотрим, например, вопрос об измерении отрезков, расположенных на прямой линии. Одно из двух возможных направлений движения вдоль данной прямой MN назовем положительным направлением; направленную прямую будем называть о с ь ю. На чертеже 1а выбрано и отмечено стрелкой направление „вправо“ (здесь мы пользуемся наглядным представлением, точное определение соответствующих геометрических понятий относится к геометрии). Для измерения отрезков, направление которых совпадает с направлением оси (например, отрезок AB), будем пользоваться положительными числами. Если точка B совпадает с точкой A (т. е. если отрезок „выродился“ в точку), то будем говорить, что AB есть „нулевой отрезок“. Нулевому отрезку в качестве результата его измерения припишем число нуль. Для измерения отрезков, направление которых противоположно направлению оси, надо ввести в рассмотрение н о в ы е числа — назовем их о т р и ц а т е л ь н ы м и. Если величина отрезка AB (направленного вправо) характеризуется числом a, то величина отрезка BA должна характеризоваться „новым“ отрицательным числом, обозначим его через $-a$. Числа a и $-a$ назовем взаимно противоположными. Положительные целые и дробные числа, отрицательные числа и число 0 называются общим термином „рациональные числа“. Числа, известные из арифметики, находятся между собой в известных взаимоотношениях: во-первых, *над этими числами можно выполнять арифметические действия,* во-вторых, *эти числа связаны между собой соотношениями взаимного расположения,* а именно из двух различных чисел одно является бо́льшим, а другое является меньшим. Арифметические действия применительно к нозым числам нами еще не установлены; так, например, мы еще не знаем, что значит сложить два отрицательные числа или сложить положительное с отрицательным. Точно так же мы не знаем, как сравниваются по величине два отрицательные числа или отрицательное число с положительным. Установить арифметические действия в расширенном множестве чисел можно посредством введения соответствующих о п р е д е л е н и й. Эти определения суть с о г л а ш е н и я, в которых мы уславливаемся приписывать определенный смысл арифметическим действиям в случаях, когда в них в качестве компонентов участвуют „новые“ числа. *Эти определения* (как и всякие определения) *недоказуемы.* Аналогично, понятия „больше“, „меньше“, „равно“ применительно к новым числам вводятся посредством надлежащих определений.



Черт. 1.

Сформулируем те принципы, которыми мы будем руководствоваться при установлении определений.

Во-первых. При помощи действий над числами известными из арифметики решается ряд важнейших практических задач. *Введение в математику новых чисел является плодотворным, поскольку эти числа имеют конкретное истолкование и могут применяться в практической деятельности человека.* Отсюда понятен следующий принцип.

Посредством действий над рациональными числами должны решаться применительно к направленным величинам те же задачи, которые решаются в арифметике посредством действий над положительными числами.

Так, например, сумма отрезков (не направленных) имеет длину, равную сумме длин отрезков-слагаемых. Как известно, сложение произвольных направленных отрезков устанавливается при помощи следующего правила:

$$AB + BC = AC$$ (черт. 1).

В силу сформулированного принципа, число, измеряющее отрезок AC, следует рассматривать как сумму чисел, измеряющих отрезки AB и BC.

В школьном учебнике алгебры формулировке правил действий над положительными и отрицательными числами предпосылается рассмотрение ряда разнообразных конкретных задач (сложение направленных отрезков, движение „вправо“ и „влево“, подсчет прибыли и убытка, изменение температуры и т. п.). В результате решения этих задач выясняется, как должны быть установлены правила действия над положительными и отрицательными числами, исходя из конкретного смысла этих действий. Так, например, если мы поставим условие, чтобы формула пути при равномерном движении:

$$s = vt$$

была применима при произвольном направлении скорости и при отсчете времени от данного момента в будущее и в прошедшее, то для умножения положительных и отрицательных чисел неизбежно должно быть принято известное „правило знаков“.

Мы не будем повторять все эти рассуждения, так как с достаточной убедительностью они излагаются в школьном учебнике. Мы отметим лишь следующее: конкретное толкование действий над положительными и отрицательными числами показывает, что в множестве рациональных чисел должно быть всегда выполнимо действие вычитания. Обратимся к действиям над отрезками. Каковы бы ни были отрезки AB и AC, существует единственный отрезок-разность X, удовлетворяющий условию:

$$AB + X = AC, \qquad (1)$$

именно $X = BC$.

Пусть a и b — числа, измеряющие отрезки AC и AB; число x, измеряющее отрезок BC, есть разность $a - b$ чисел a и b, так как в силу равенства (1) мы должны иметь:

$$b + x = a,$$

Во-вторых. Действия над числами, известными из арифметики, обладают рядом свойств. Основные законы действий таковы:

Свойства сложения.

1° *Закон коммутативности (переместительности):*

$$a+b=b+a.$$

2° *Закон ассоциативности (сочетательности):*

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Свойства умножения.

3° *Закон коммутативности:*

$$ab=ba.$$

4° *Закон ассоциативности:*

$$(ab)c=a(bc).$$

Сложение и умножение связаны между собой следующим образом:

5° *Закон дистрибутивности (распределительности):*

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Из этих основных законов в арифметике выводятся правила действий с любым числом компонентов.

В множестве чисел, известных по арифметике, однозначно выполнимо действие, обратное умножению (деление), кроме деления на нуль, именно: *каковы бы ни были числа* a и b, причем $b\neq 0$, существует единственное число x, удовлетворяющее условию:

$$bx=a,$$

это число (частное) обозначается так:

$$x=\frac{a}{b}.$$

Действие, обратное сложению (вычитание), выполнимо не всегда, именно: число $x=a-b$, удовлетворяющее условию:

$$b+x=a, \tag{2}$$

существует лишь, если $a\geqslant b$.

Нижеследующие равенства:

$$a+0=a, \quad a\cdot 0=0, \quad 1\cdot a=a, \tag{3}$$

справедливые при произвольном a, характеризуют свойства чисел 0 и 1.

При определении действия над произвольными рациональными числами мы будем руководствоваться следующим принципом:

Действия сложения и умножения должны быть однозначно выполнимы, это значит: всяким двум рациональным числам a и b можно поставить в соответствие единственное число $a+b$, называемое их суммой, и единственное число ab, называемое произведением,

При этом *сложение и умножение положительных чисел должны иметь тот же смысл, что и в арифметике. Для действий сложения и умножения должны быть справедливы основные законы* 1°—5°. *Должны выполняться равенства* (3). *В множестве рациональных чисел всегда должно быть однозначно выполнимо действие вычитания,* т. е. при любых данных a и b должно существовать единственное число x, удовлетворяющее условию (2). *В множестве рациональных чисел должно быть однозначно действие деления, кроме деления на нуль.*

Если будут выполняться законы 1°—5°, то при производстве различных действий над рациональными числами можно будет руководствоваться теми же правилами действий, которые установлены в арифметике (в качестве следствий из основных законов).

Допустим, что поставленным условиям можно удовлетворить, тогда из этих условий с неизбежностью будут вытекать те определения, которые следует принять для действий над рациональными числами. Ниже мы приводим соответствующие рассуждения, не претендуя, однако, на их исчерпывающую полноту.

Итак, выясним, какие определения следует принять для действий над рациональными числами, чтобы продолжали оставаться в силе основные законы действий. В силу выполнимости вычитания для всякого числа a в множестве рациональных чисел должно существовать единственное противоположное число $x=(-a)$, удовлетворяющее условию:

$$a+x=0 \quad \text{или} \quad a+(-a)=0.$$

Пусть $a<b$, в множестве рациональных чисел должно существовать единственное число x, удовлетворяющее условию:

$$b+x=a.$$

Обозначим $b-a=r$, т. е. $b=a+r$. Следовательно,

$$(a+r)+x=a.$$

Прибавив к обеим частям $-a$, получим (воспользовавшись свойствами сложения):

$$(-a)+(a+r)+x=0 \text{ или } [(-a)+a+r]+x=0,$$

откуда $r+x=0$ и $x=-r=-(b-a)$. Значит, x есть число, противоположное разности $b-a$.

Пусть $-r$ и $-r_1$ — два отрицательные числа (тогда r и r_1 — положительные числа), имеем:

$$\left.\begin{aligned} r+(-r)&=0 \\ r_1+(-r_1)&=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

складывая почленно, получим:

$$[r+(-r)]+[r_1+(-r_1)]=0;$$

в силу свойств переместительности и сочетательности сложения будем иметь:

$$(r+r_1)+[(-r)+(-r_1)]=0,$$

откуда:

$$(-r)+(-r_1)=-(r+r_1).$$

Значит сумма двух отрицательных чисел должна быть числом, противоположным сумме $r+r_1$.

Пусть r — положительное число, а $-r_1$ — отрицательное число, имеем:

$$r_1+(-r_1)=0.$$

Прибавим к обеим частям число r:

$$r+(-r_1)+r_1=r$$

или

$$r_1+[r+(-r_1)]=r.$$

Из последнего равенства следует, что при $r>r_1$ сумма $r+(-r_1)$ должна быть равна разности $r-r_1$, а при $r<r_1$ эта сумма должна быть равна числу $-(r_1-r)$, противоположному разности r_1-r. Таким образом, мы пришли к известным из школьного курса правилам сложения положительных и отрицательных чисел.

Обратимся к правилам умножения; имеем:

$$a+(-a)=0,$$

умножим обе части на произвольное рациональное число b. При умножении левой части воспользуемся законом дистрибутивности, который по условию должен оставаться в силе. Имеем:

$$[a+(-a)]\,b=ab+(-a)\,b \quad \text{или} \quad ab+(-a)\,b=0.$$

Следовательно, число $(-a)\,b$ противоположно ab:

$$(-a)\,b=-ab;$$

заменив b на $-b$, получим:

$$(-a)\,(-b)=-a\,(-b)=ab.$$

Мы пришли к известным из школьного курса правилам умножения положительных и отрицательных чисел.

Приведенные рассуждения выясняют, какими должны быть правила действий в множестве рациональных чисел. Однако мы не касались вопроса, может ли на самом деле быть построено такое множество чисел, в котором выполняется ряд заранее поставленных условий, которыми мы пользовались при выводе правил арифметических действий.

В последующих параграфах будет дано формально-логическое обоснование теории рациональных чисел. Мы покажем, что на основе известного из арифметики множества чисел путем формально-логических определений можно построить систему новых объектов „чисел“ так, что после их присоединения к ранее известным числам образуется новое „расширенное“ множество чисел, в котором будут действительно реализованы все условия, послужившие отправным пунктом в изложен-

ных рассуждениях. В формально-логической теории действия над числами будут устанавливаться посредством тех или иных соглашений; соображения, изложенные в настоящем параграфе, послужат мотивировкой, вскрывающей причины, побудившие принять эти соглашения.

§ 2. Рациональные числа

Всякому положительному рациональному числу a поставим в соответствие новый объект, обозначаемый символом $-a$. Так, например (в силу установленного соответствия), числу 1 соответствует -1, числу 3 соответствует -3, числу $\frac{1}{3}$ соответствует $-\frac{1}{3}$.

Эти объекты будем рассматривать как новые числа и назовем их отрицательными рациональными числами.

Этого определения недостаточно для характеристики понятия отрицательного числа, так как нами пока еще не установлено никаких взаимоотношений, связывающих „новые числа" между собой и со „старыми числами". Эти взаимоотношения будут нами устанавливаться постепенно, и полная характеристика понятия отрицательного числа будет выработана при помощи цепи определений.

Определение. *Взаимно соответствующие числа a и $-a$ называются противоположными или симметричными.*

Число $-a$ является противоположным относительно a, а число a противоположным относительно $-a$.

Итак, постановка знака — перед положительным числом означает переход к противоположному, отрицательному числу. Условимся и для отрицательного числа постановкой знака — обозначать переход к соответствующему положительному числу. В силу этого соглашения имеем $-(-a)$ есть a, $-(-(-a))$ есть $-a$. Например, $-(-2)$ есть 2 или $-\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ есть $-\frac{1}{3}$.

Примем следующее дополнительное соглашение; *число* 0 *считается противоположным самому себе:* -0 есть 0.

Число 0 *не принято относить ни к положительным ни к отрицательным числам.*

Отрицательное число называется целым (дробным), если противоположное число является целым (дробным). Так, числа -2, -5 — целые, а числа $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{7}$ — дробные.

Положительные и отрицательные числа целые и дробные и число 0 *образуют все вместе числовое множество, называемое множеством рациональных чисел.*

Примечание I. Если условиться положительному числу a относить знак $+$ и считать, что $+a$ есть a (например, $+2$ есть 2, $+7$ есть 7), тогда всякому рациональному числу a, отличному

от нуля, можно приписать знак $+$, если оно положительно, и $-$, если оно отрицательно.

Примечание II. Если считать, что буква a обозначает любое рациональное (а не только положительное) число, то $-a$ изображает отрицательное число, если a положительно; положительное число, если a отрицательно, и нуль, если число a есть нуль.

Примечание III. Знак $-$ (минус) может играть двоякую роль: как символ перехода к противоположному числу и как символ действия вычитания. Ниже, где в одних и тех же записях этому знаку приписывается различный смысл, будут употребляться скобки; именно число $-a$, противоположное данному числу a, будет обозначаться так: $(-a)$.

Определение. *Абсолютной величиной положительного числа называется само это число; абсолютной величиной отрицательного числа — противоположное ему положительное число; абсолютной величиной нуля само число* 0.

Абсолютная величина называется также модулем. Для обозначения абсолютной величины помещают данное число в прямые вертикальные черточки. Например:

$$|2|=2,\quad \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad |0|=0,\quad |5-3|=|2|=2.$$

В конкретном истолковании абсолютная величина числа показывает количество единиц измерения, содержащихся в данной величине без учета ее направления.

Длина отрезка (без учета направления) положительна и выражается абсолютной величиной соответствующего числа.

§ 3. Сравнение рациональных чисел

Числа, изучающиеся в арифметике, связаны между собой соотношениями взаимного расположения: если a и b данные числа, то имеет место одно из соотношений: $a<b$, $a>b$ или $a=b$. Соотношения взаимного расположения обладают следующими так называемыми законами скалярного расположения:

I. *Для произвольной пары чисел* a *и* b *имеет место одно из соотношений:* $a=b$, $a<b$, $a>b$.

II. *Свойство необратимости неравенств: если* $a<b$, *то* $b>a$; *если же* $a>b$, *то* $b<a$.

III. *Свойство транзитивности неравенств: если* $a<b$ *и* $b<c$, *то* $a<c$.

IV. *Свойство транзитивности равенства: если* $a=b$ *и* $b=c$, *то* $a=c$.

V. *Свойство рефлексивности равенства: всегда* $a=a$.

Прочие известные из арифметики свойства равенства и неравенства можно вывести из основных соотношений I—V. Для примера выведем свойство симметричности равенства: *если* $a=b$, *то* $b=a$.

Пусть дано $a=b$. В силу I имеет место одно из соотношений $b>a$, $b<a$ и $b=a$. Но неравенство $b<a$ не может иметь место, так как в противном случае мы имели бы $a>b$ (свойство II), аналогично не может иметь место соотношение $b>a$, следовательно, $b=a$.

При распространении понятий равенства и неравенств мы будем руководствоваться следующим принципом: *основные законы* I—V *должны сохраниться.*

Смысл принципа понятен: из основных законов I—V вытекают те правила, с которыми мы оперируем в арифметике при сравнении чисел. Сохранение основных свойств I—V позволит применять прежние правила и к произвольным рациональным (а не только к положительным) числам.

Определение равенства. *Условимся отрицательные числа* $-a$ и $-b$ *считать равными, если равны их абсолютные величины* $a=b$.

Этим определением формулируется принцип отождествления отрицательных чисел. Так, например: $-\frac{1}{3}=-\frac{2}{6}$, ибо $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; символы $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{6}$ рассматриваются не как различные числа, а лишь как различные обозначения одного и того же числа.

Итак, мы будем рассматривать рациональные числа как индивидуализированные объекты и считать равные числа лишь различными формами задания одного и того же числа.

Определение неравенств. *Условимся считать*

1° *всякое отрицательное число меньшим нуля и меньшим любого положительного числа:*

$$-a<0, \quad -a<b \quad (\text{где } a \text{ и } b>0);$$

2° *всякое положительное число и нуль бо́льшими любого отрицательного числа:* $b>-a$, $0>-a$;

3° *из двух отрицательных чисел то меньшим, у которого абсолютная величина больше, и то бо́льшим, у которого абсолютная величина меньше:*

$$-a<-b, \text{ если } a>b.$$

Так, например, $-5<7$, $-10<2$, $-1<0$, $-20<-4{,}5$, $-3>-25$.

При этих определениях все законы I—V остаются в силе. Для примера рассмотрим свойство транзитивности неравенств.

1) Возьмем три отрицательные числа, связанные неравенствами $-a<-b$, $-b<-c$, покажем, что $-a<-c$.

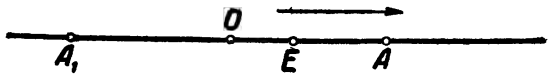
В самом деле, в силу определения 3° имеем $a>b$ и $b>c$, откуда, в силу транзитивности неравенств для положительных чисел, $a>c$, следовательно, $-a<-c$.

2) Возьмем два отрицательные числа $-a<-b$, пусть c — положительное число; тогда имеем $-b<c$. Так как $-a$ отрицательное число, то $-a<c$.

Предлагаем учащимся самостоятельно рассмотреть остальные возможные случаи.

Так как свойства I—V остаются в силе, то в их символической записи под буквами a, b и c можно подразумевать произвольные рациональные (а не только положительные) числа.

Обратимся к геометрическому истолкованию неравенств. Возьмем прямую линию (черт. 2), отметим на ней (произвольно) точку O, установим положительное направление (на чертеже 2 слева направо) и выберем единицу масштаба (отрезок OE). Если a — положительное число, то условимся изображать его точкой A, отложив вправо от точки O отрезок OA длины, равной a. Для изображения отрицательного числа $-a$ отложим влево от точки O отрезок OA_1 длины, равной a. Число 0 условимся изображать точкой O. Из сказанного следует:



Черт. 2

1) *Противоположным числам a и $-a$ соответствуют на прямой точки симметричные относительно точки O.*

2) *Абсолютная величина рационального числа равна расстоянию соответствующей точки до точки O.*

3) *Бо́льшему числу соответствует на прямой точка, расположенная правее.*

При соблюдении неравенств $a<b<c$ (где a, b и c любые рациональные числа) точка B, соответствующая числу b, расположена между точками A и C, соответствующими числам a и c. Сохраняя геометрическую терминологию, говорят, что число b заключено между числами a и c. Так, например, число -1 заключено между числами -2 и 1 (здесь $a=-2$, $b=-1$, $c=1$).

§ 4. Арифметические действия над рациональными числами

Сложение. ***Определение:*** 1° *Суммой двух отрицательных чисел называется отрицательное число, противоположное сумме абсолютных величин слагаемых:*

$$(-a)+(-b)=-(a+b) \text{ (где } a \text{ и } b \text{ положительны).}$$

2° *Если два данные числа различны по знаку, то их суммой называется разность абсолютных величин, взятая со знаком слагаемого, имеющего большую абсолютную величину; сумма двух противоположных чисел считается равной нулю:*

$$a+(-b)=(-b)+a=\begin{cases} a-b & (\text{если } a>b) \\ -(b-a) & (\text{если } b>a) \\ 0 & (\text{если } a=b) \end{cases}$$

3° *Если одно из слагаемых равно нулю, то сумма считается равной другому слагаемому:* $a+0=a$, $(-a)+0=-a$, $0+0=0$.

Следствие. Сумма двух рациональных чисел может равняться нулю лишь в том случае, когда данные числа противоположны.

Примеры:

$$(-7)+5=-2;\quad \left(\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=1;$$
$$(-1)+(-3)=-4;\quad (-2)+2=0.$$

Покажем, что известные из арифметики свойства *коммутативности*:

$$a+b=b+a \tag{1}$$

и ассоциативности:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{2}$$

сложения остаются в силе при сложении произвольных рациональных чисел.

Справедливость свойства коммутативности ясна непосредственно, ибо в определении оба слагаемые равноправны и не фиксирована особая роль первого или второго из них. Поэтому в равенстве (1) под буквами a и b можно подразумевать не только положительные (как было до настоящего времени), но и *произвольные* рациональные числа.

Примеры:

$$2+(-3)=(-3)+2=-1 \text{ (здесь } a=2,\ b=-3);$$
$$(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)=-\frac{7}{2}\left(\text{здесь } a=-3,\ b=-\frac{1}{2}\right).$$

Для доказательства сохранения свойства ассоциативности надо рассмотреть различные возможные случаи, касающиеся знаков слагаемых. Соответствующие рассуждения элементарны, и мы в качестве образца подробно рассмотрим лишь один из этих случаев. Докажем, например, что

$$[a+(-b)]+c=a+[(-b)+c] \tag{3}$$

(a, b и c положительны).

Преобразуем отдельно выражения в правой и левой частях доказываемого равенства. Преобразуем $[a+(-b)]+c$.

Случай А. Пусть $a>b$, тогда в силу известных из арифметики свойств вычитания получим:

$$[a+(-b)]+c=(a-b)+c=(a+c)-b.$$

Теперь предположим, что $a<b$; имеем:
$[a+(-b)]+c=-(b-a)+c$ (по определению сложения).
Здесь могут представиться следующие два случая.

Случай В. Пусть $c>b-a$, или, что то же, $a+c>b$, тогда

$$[a+(-b)]+c=c-(b-a)=(a+c)-b.$$

Случай С. Пусть $c<b-a$, или $a+c<b$, тогда

$$[a+(-b)]+c=-(b-a)+c=-[(b-a)-c]=$$
$$=-[b-(a+c)].$$

Заметим, что в случае А условие $a+c>b$ выполняется само собой, а потому оба случая А и В можно характеризовать этим условием. Итак, имеем

$$[a+(-b)]+c=\begin{cases}(a+c)-b & \text{(если } a+c>b\text{, т. е. случаи А и В)}\\ -[b-(a+c)] & \text{(если } a+c<b\text{, т. е. случай С).}\end{cases}$$

Рассмотрим выражение $a+[(-b)+c]$. Если $b<c$, то оно равно $(a+c)-b$, если же $b>c$, то получим $a+[-(b-c)]=-(b-c)+a$. Отсюда, подобно предыдущему (рассмотрев все возможные случаи) найдем:

$$a+[(-b)+c]=\begin{cases}(a+c)-b & \text{(если } a+c>b\text{),}\\ -[b-(a+c)] & \text{(если } a+c<b\text{),}\end{cases}$$

чем и доказана справедливость равенства (3). Предлагаем учащимся самостоятельно доказать справедливость закона ассоциативности для прочих возможных случаев:

$$[(-a)+(-b)]+c=(-a)+[(-b)+c];\qquad (a+b)+(-c)=a+[b+(-c)];\qquad [(-a)+b]+c=(-a)+(b+c)$$ и т. д.

В силу закона ассоциативности в равенстве

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

под буквами a, b и c можно подразумевать произвольные рациональные числа.

Примеры:

1) $[(-2)+3]+(-7)=1+(-7)=-6$; $(-2)+[3+(-7)]=(-2)+(-4)=-6$. Здесь $a=-2$, $b=3$, $c=-7$.

2) $[5+(-4)]+(-8)=1+(-8)=-7$; $5+[(-4)+(-8)]=5+(-12)=-7$. Здесь $a=5$, $b=-4$, $c=-8$.

Теорема. *Число, противоположное сумме любых двух рациональных слагаемых, равно сумме чисел, противоположных слагаемым:*

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что сумма чисел $a+b$ и $(-a)+(-b)$ равна нулю:

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)]&=[(a+b)+(-a)]+(-b)=\\ &=[a+[b+(-a)]]+(-b)\ \text{(ассоциативность)}\\ &=[a+[(-a)+b]]+(-b)\ \text{(коммутативность)}\\ &=[[a+(-a)]+b]+(-b)\ \text{(ассоциативность)}\\ &=b+(-b)=0.\end{aligned}$$

Обратимся к конкретному истолкованию сложения рациональных чисел. Будем характеризовать увеличение некоторой данной величины положительным числом, уменьшение — отрицательным числом, а отсутствие изменения — числом 0. Если данная величина увеличилась на a единиц, а затем на b единиц, то изменение характеризуется суммой

$a+b$. Если данная величина уменьшилась на a единиц, а затем уменьшилась еще на b единиц, то ее изменение есть уменьшение на $a+b$ единиц, характеризующееся отрицательным числом $-(a+b)$, равным сумме чисел $-a$ и $-b$.

Если данная величина увеличилась на a единиц, а затем уменьшилась на b единиц, то мы получим увеличение на $a-b$ единиц, если $a>b$, и уменьшение на $b-a$ единиц, если $b>a$. В первом случае изменение характеризуется положительным числом $a-b$, а во втором отрицательным числом $-(b-a)$, т. е. в обоих случаях — суммой $a+(-b)$.

Таким образом, при последовательном изменении данной величины на a и на b единиц результирующее изменение характеризуется суммой $a+b$ безразлично, будут ли сами числа a и b положительными или отрицательными.

Умножение. ***Определение.*** *Произведением двух рациональных чисел называется:*

1° *произведение их абсолютных величин, если данные числа оба положительны или оба отрицательны;*

2° *число, противоположное произведению их абсолютных величин, если один из сомножителей положителен, а другой отрицателен;*

3° *нуль, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.*

Установленное правило умножения, как и всякое определение, доказано быть не может.

Согласно определению умножение рациональных чисел выполняется по следующему правилу: *абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей:*

$$|ab|=|a||b|;$$

знак произведения определяется по следующей схеме (правило знаков):

$$(+)(+)=(+);\quad (+)(-)=(-);\quad (-)(-)=(+);\quad (-)(+)=(-).$$

Таким образом, имеем:

$$(-a)(-b)=ab;\quad (-a)b=b(-a)=-ab;\quad a\cdot 0=0\cdot a=0,$$

Примеры: $5\cdot(-2)=-10$; $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$; $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0=0$;

$$7\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-1.$$

Примечание. Умножение на -1 равносильно изменению знака другого сомножителя, т. е. переходу к противоположному числу:

$$a(-1)=-(a\cdot 1)=-a;\quad (-a)(-1)=a\cdot 1=a.$$

Из арифметики известны следующие основные свойства умножения:

1° *Свойство коммутативности (переместительности):*

$$ab=ba. \tag{4}$$

2° *Свойство ассоциативности (сочетательности):*

$$(ab)\,c = a(bc). \tag{5}$$

3° *Свойство дистрибутивности (распределительности) умножения относительно сложения:*

$$(a+b)\,c = ac + bc. \tag{6}$$

Покажем, что эти свойства остаются в силе при умножении произвольных рациональных чисел.

Справедливость свойства коммутативности непосредственно вытекает из определения умножения.

Справедливость свойства ассоциативности легко проверить непосредственно. Абсолютные величины обоих произведений $(ab)\,c$ и $a\,(bc)$ равны $(|a|\,|b|)\,|c| = |a|\,(|b|\,|c|)$ (ассоциативность умножения положительных чисел). Эти произведения одинаковы по знаку: оба положительны, если среди чисел a, b и c одно или все три положительны; оба отрицательны, если среди этих чисел одно или три отрицательны; оба равны нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Таким образом, справедливость равенства (5) доказана.

Пример. $[(-2)\cdot 3]\,5 = -30$; $(-2)\cdot[3\cdot 5] = -30$ (здесь $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$).

Обратимся к доказательству закона дистрибутивности. Предположим сначала, что c положительное число.

Случай А. Одно из слагаемых (например, второе) отрицательно. Если $a \geqslant b$, то

$$\begin{aligned}[(a+(-b)]\,c = (a-b)\,c &= ac - bc \text{ (по свойствам вычитания положительных чисел)}\\ &= ac + (-bc) \text{ (по определению сложения)}\\ &= ac + (-b)\,c \text{ (по определению умножения).}\end{aligned}$$

Если $a < b$, то

$$\begin{aligned}[a+(-b)]\,c = [-(b-a)]\,c &= -[(b-a)\,c] \text{ (по определению умножения)}\\ &= -(bc - ac) \text{ (по свойствам вычитания положительных чисел)}\\ &= ac + (-bc) \text{ (по определению сложения)}\\ &= ac + (-b)\,c \text{ (по определению умножения).}\end{aligned}$$

Случай В. Оба слагаемые, первое и второе, отрицательны:

$$\begin{aligned}[(-a)+(-b)]\,c = [-(a+b)]\,c &= -[(a+b)\,c] = -[(ac)+(bc)] =\\ &= (-ac)+(-bc) = (-a)\,c + (-b)\,c.\end{aligned}$$

Случай С. Пусть c отрицательно, а a и b произвольные рациональные числа. Свойство дистрибутивности справедливо, если $c = -1$, ибо (стр. 16)

$$(a+b)(-1) = -(a+b) = (-a)+(-b) = a(-1)+b(-1).$$

Если $-c$ любое отрицательное число, то:

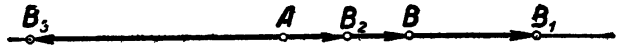
$$(a+b)(-c)=(a+b)[c(-1)]=[(a+b)c](-1) \text{ (ассоциативность)}$$
$$=[ac+bc](-1) \text{ (дистрибутивность при } c>0)$$
$$=(ac)(-1)+(bc)(-1)=a[c(-1)]+b[c(-1)] \text{ (ассоциативность)}$$
$$=a(-c)+b(-c).$$

Рассмотрение случая, когда хотя бы одно из чисел a, b и c равно 0, предоставляем учащимся.

Теорема. *Если каждое из двух рациональных чисел a и b отлично от нуля: $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то их произведение также отлично от нуля:*

$$ab\neq 0.$$

Доказательство: если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то $|a|>0$ и $|b|>0$, но тогда $|ab|=|a||b|>0$ и $ab\neq 0$, ч. т. д.



Черт. 3

Следствие. Необходимым и достаточным условием равенства нулю произведения двух рациональных чисел является равенство нулю хотя бы одного сомножителя.

В самом деле, если хотя бы одно из чисел a и b равно нулю, то $ab=0$ (определение умножения, пункт 3°).

Обратно, если $ab=0$, то хотя бы одно из чисел a и b равно нулю, так как в противном случае $ab\neq 0$.

Обратимся к конкретному истолкованию умножения рациональных чисел. Под изменением данной направленной величины в a раз, где a — положительное число, будем подразумевать переход к другой величине, имеющей одинаковое направление с данной и находящейся с ней в отношении, равном a. Так, например, изменить отрезок AB (черт. 3) в 2 раза означает перейти к отрезку AB_1, вдвое большему по величине и имеющему одинаковое направление с AB. Изменить отрезок AB в $\frac{1}{2}$ раза значит перейти к отрезку AB_2, вдвое меньшему по величине и одинаково направленному с AB.

Если последовательно изменить данную величину в a раз, а затем в b раз, то она изменится в ab раз. Так, например, увеличение отрезка в 3 раза, а затем в 5 раз дает его увеличение в 15 раз.

Пусть $-a$ отрицательное число, под изменением данной величины в $-a$ раз будем подразумевать ее изменение в a раз и перемену направления на противоположное. Так, изменение отрезка AB в -2 раза есть переход к отрезку AB_3, вдвое большему по длине и противоположно направленному. Пусть a и $-b$ два данные числа, из которых первое положительно, а второе отрицательно. Последовательное изменение данной величины в a, а затем в $-b$ раз равносильно ее изменению в ab раз и перемене направления на противоположное. Резуль-

тирующее изменение характеризуется числом $-(ab)$, т. е. произведением $a(-b)$. Аналогично, последовательное изменение в $-a$ и в b раз равносильно изменению в $(-a)b$ раз. Пусть $-a$ и $-b$ данные отрицательные числа; последовательное изменение величины в $-a$ и $-b$ раз равносильно ее изменению в ab раз и двукратной перемене направления. Поэтому направление данной величины не меняется, и ее изменение характеризуется числом ab, т. е. произведением $(-a)(-b)$.

Итак, будут ли числа a и b положительными или отрицательными, *результат последовательного изменения величины в a и в b раз характеризуется произведением ab.*

Примечание. Умножение на -1 характеризует изменение направления величины на противоположное.

Вычитание. Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Определение. *Разностью $a-b$, где a и b произвольные рациональные числа, называется число x, удовлетворяющее условию:*

$$b+x=a. \tag{7}$$

Допустим, что искомое число x существует, прибавим к обеим частям этого равенства число, противоположное числу b, отсюда находим единственно возможное значение $x=a+(-b)$. Проверкой убеждаемся, что найденное значение действительно удовлетворяет услозию (7):

$$b+[a+(-b)]=b+(-b)+a=[b+(-b)]+a=a.$$

Отсюда ***правило:*** *Разность двух рациональных чисел равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:*

$$a-b=a+(-b).$$

В множестве рациональных чисел вычитание всегда возможно.

Примеры: $5-7=5+(-7)=-2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=$ $=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$; $-3-5=-3+(-5)=8$.

Рассмотрим равенства

$$a-b=a+(-b) \text{ и } a+b=a-(-b),$$

первое показывает, что разность двух чисел всегда представима в виде суммы, второе показывает, что сумма всегда может быть представлена в виде разности. Следовательно, нет необходимости особо изучать свойства вычитания, ибо все они вытекают из соответствующих свойств сложения. Так, например, свойство дистрибутивности умножения относительно вычитания вытекает из соответствующего свойства сложения. В самом деле,

$$(a-b)c=[a+(-b)]c=ac+(-b)c=ac+(-bc)=ac-bc.$$

Примечание. Возможность представления разности в виде суммы уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому, оправдывает употребление одного и того же знака „—“ и как знака действия и как знака перехода к противоположному числу.

Действия с числом компонентов большим двух в множестве рациональных чисел понимаются в том же смысле, как и в арифметике. Так, например, под суммой $a_1+a_2+a_3+a_4$ следует понимать результат последовательного сложения:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=[(a_1+a_2)+a_3]+a_4$$

и аналогично

$$a_1a_2a_3a_4=[(a_1a_2)a_3]a_4.$$

Выражение, обозначающее ряд последовательных сложений и вычитаний, всегда может быть представлено в виде суммы, а потому называется алгебраической суммой.

Так, например, выражение $a+b-c-d$ можно представить в виде суммы следующих слагаемых: a, b, $(-c)$, $(-d)$. Примерами алгебраических сумм могут служить:

$$3-7+5,\quad a+2b,\quad a^2-ax+x^2,\quad \frac{x^2}{x-a}+2.$$

Примечание. Не следует думать, что член алгебраической суммы, предшествуемый знаком —, имеет отрицательное, а знаком + положительное числовое значение. Так, например, в сумме $a-b+c$ член $-b$ положителен, если значение b отрицательно, отрицателен, если значение b положительно, и равен 0, если $b=0$.

Деление. Деление определяется как действие, обратное умножению.

Определение. *Частным* $\frac{a}{b}$ *называется число* x, *удовлетворяющее условию:*

$$a=bx. \tag{8}$$

Пусть a и b — произвольные рациональные числа, причем $b\neq 0$. По правилу умножения рациональных чисел имеем $|b|\cdot|x|=|a|$, откуда находим абсолютную величину искомого частного: $|x|=\frac{|a|}{|b|}$. Условие (8) показывает, что число x должно быть положительным, если числа a и b одинаковы по знаку, отрицательным, если эти числа противоположны по знаку, и равным 0, если $a=0$.

Найденное (единственное) число x действительно удовлетворяет условию (8), ибо произведение bx равно по абсолютной величине числу a:

$$|bx|=|b||x|=|b|\frac{|a|}{|b|}=|a|,$$

и совпадает с ним по знаку (в силу выбора знака числа x).

Отсюда ***правило:*** *Если делитель отличен от нуля, то абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин, а знак частного определяется по правилу знаков:*

$$\frac{(+)}{(+)}=(+);\ \frac{(-)}{(-)}=(+);\ \frac{(+)}{(-)}=(-);\ \frac{(-)}{(+)}=(-).$$

Мы предполагали делитель отличным от нуля; пусть теперь $b=0$, возможны следующие два случая:

1° $b=0$, $a\neq 0$. В этом случае условию (8) не может удовлетворить никакое рациональное число x, ибо $0\cdot x=0\neq a$. Следовательно, деление невыполнимо.

2° $a=b=0$. В этом случае условию (8) удовлетворяет произвольное число x, ибо $0\cdot x=0$. Поэтому в качестве частного можно было бы рассматривать любое рациональное число. Однако такую точку зрения нельзя считать целесообразной, как противоречащую основному принципу, в силу которого результатом выполнения арифметического действия должно являться некоторое вполне определенное число. Это заставляет и в случае 2° считать деление невыполнимым. Итак, *во всех случаях деление на* 0 *невыполнимо, а выражения вида* $\frac{a}{0}$ и $\frac{0}{0}$ *рассматриваются как не имеющие смысла.* При рассмотрении деления будем во всех случаях считать делители отличными от нуля, не делая каждый раз специальных оговорок.

Всякому рациональному числу a, отличному от нуля, можно поставить в соответствие число a_1, равное $\frac{1}{a}$, которое называется обратным числом по отношению к a. Произведение двух взаимно обратных чисел равно 1:

$$aa_1=1,$$

Нуль обратного числа не имеет.

Примеры: 1) $a=2$, обратное число $a_1=\frac{1}{2}$; 2) $a=-\frac{2}{5}$, обратное число $a_1=-\frac{5}{2}$; 3) $a=-\frac{1}{3}$, обратное число $a_1=-3$.

Из правила деления рациональных чисел следует, что взаимно обратные числа обратны по абсолютной величине и одинакозы по знаку. Заметим, что для чисел 1 и —1 обратные числа соответственно равны им самим.

Действие деления может быть заменено умножением на число, обратное делителю. В самом деле, умножая обе части равенства $bx=a$ на число $\frac{1}{b}$, получим $(bx)\ \frac{1}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, откуда $1\cdot x=x=a\cdot\frac{1}{b}$.

Поэтому нет необходимости специально изучать свойства деления, ибо все эти свойства вытекают из соответствующих свойств умножения. Поясним это на ряде примеров. Покажем предварительно, что число, обратное произведению, равно произведению обратных чисел сомножи-

телей. В самом деле, проверкой убеждаемся, что произведение чисел ab и $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$ равно 1:

$$(ab)\cdot\left(\frac{1}{a}\,\frac{1}{b}\right)=(ab)\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{a}\right)=\left(ab\cdot\frac{1}{b}\right)\frac{1}{a}=a\,\frac{1}{a}=1,$$

откуда

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{b}.$$

Арифметическое правило, утверждающее, что значение частного не меняется при умножении делимого и делителя на одно и то же число, не равное 0, остается в силе и в множестве рациональных чисел. Пусть a, b и k любые (целые или дробные) рациональные числа, причем $b\neq 0$ и $k\neq 0$.

Имеем: $\frac{ak}{bk}=ak\,\frac{1}{bk}=ak\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{k}\right)=\left(a\,\frac{1}{b}\right)k\,\frac{1}{k}=a\,\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$.

Покажем, что известное из арифметики правило умножения дробей остается в силе:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=a\,\frac{1}{b}\,c\,\frac{1}{d}=(ac)\,\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{d}\right)=ac\cdot\frac{1}{bd}=\frac{ac}{bd}.$$

Наконец, установим справедливость свойства дистрибутивности деления, основываясь на свойстве дистрибутивности умножения:

$$\frac{a+b}{c}=(a+b)\,\frac{1}{c}=a\,\frac{1}{c}+b\,\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Отсюда вытекает, что арифметическое правило сложения дробей остается в силе в множестве рациональных чисел

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}.$$

Возведение в степень, согласно своему первоначальному определению (на данной ступени изучения алгебры), рассматривается как частный случай умножения:

$$a^n=\overbrace{a\cdot a\ldots a}^{n\text{ раз}},\quad (\text{при } n>1)$$

и

$$a^n=a \text{ при } n=1.$$

Согласно этому определению, выражение a^n имеет смысл лишь при натуральном n.

С точки зрения этого определения, символы a^0, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$ и. т. п. не имеют смысла, ибо не имеет смысла умножать число само на себя — 0, или — 1, или $\frac{1}{2}$ раз. Применением закона ассоциативности умножения

выводятся известные правила умножения двух степеней одного и того же числа и возведения степени в степень:

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{(a \cdot a \ldots a}^{n \text{ раз}} \overbrace{(a \cdot a \ldots a)}^{m \text{ раз}} = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = \overbrace{(a \cdot a \ldots a}^{n \text{ раз}} \overbrace{(a \cdot a \ldots a)}^{n \text{ раз}} \ldots \overbrace{(a \cdot a \ldots a)}^{n \text{ раз}} = \overbrace{a^{n+n+n+\ldots+n}}^{m \text{ раз}} = a^{nm}.$$

Правило деления степеней одного и того же числа: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (на данной ступени изучения алгебры) справедливо лишь при условии $n > m$, так как, если $n \leqslant m$, то правая часть равенства теряет смысл.

§ 5. Правила действий над рациональными числами

В арифметике правила выполнения действий с любым числом компонентов выводятся из основных законов действий:

$$\left.\begin{array}{c} a + b = b + a \\ (a + b) + c = a + (b + c) \\ ab = ba \\ (ab)c = a(bc) \\ (a + b)c = ac + bc \end{array}\right\} \qquad (I)$$

Все следствия, вытекающие из основных законов (I), остаются в силе, если только остаются в силе эти законы. Следовательно, правила выполнения действий с любым числом компонентов безоговорочно применимы к произвольным рациональным (а не только к положительным) числам, так как основные законы (I) действий остаются в силе в множестве рациональных чисел, а правила действий суть следствия законов (I).

Таким образом, установленное в предыдущем параграфе сохранение основных законов (I) есть достаточное основание, чтобы утверждать справедливость правил действий в множестве рациональных чисел, и специальные доказательства этих правил становятся излишними.

Для примера покажем, как выводится из основных законов правило умножения суммы на сумму: *при перемножении двух сумм достаточно составить всевозможные произведения каждого слагаемого первой суммы на каждое слагаемое второй суммы и все эти произведения сложить.*

Во-первых, законы ассоциативности и дистрибутивности распространяются на сумму с любым числом слагаемых. Покажем это методом полной индукции. Предположим, что законы справедливы для суммы $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ любых $n - 1$ чисел. Имеем по предположению:

$$A + S = A + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) =$$
$$= A + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \qquad \text{(ассоциативность)}$$

$$S \cdot k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})k =$$
$$= a_1 k + a_2 k + \ldots + a_{n-1} k \qquad \text{(дистрибутивность)}$$

Для n чисел a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n имеем:

$$A+(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)=A+[(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n]=$$
$$=A+(S+a_n)=(A+S)+a_n \text{ (основной закон ассоциативности)}$$
$$=(A+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \text{ (по предположению)}$$
$$=A+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n.$$

Аналогично имеем:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)\,k=(S+a_n)\,k=$$
$$=Sk+a_nk \text{ (основной закон дистрибутивности)}$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\,k+a_nk=$$
$$=a_1k+a_2k+\ldots+a_{n-1}k+a_nk \text{ (по предположению).}$$

Свойство коммутативности умножения позволяет закон дистрибутивности представить в следующей эквивалентной форме:

$$k(a_1+a_2+\ldots+a_n)=ka_1+ka_2+\ldots+ka_n.$$

В самом деле,

$$k(a_1+a_2+\ldots+a_n)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,k=$$
$$=a_1k+a_2k+\ldots+a_nk=ka_1+ka_2+\ldots+ka_n.$$

Следовательно, законы ассоциативности и дистрибутивности верны для суммы с любым числом слагаемых n, в предположении, что они верны для суммы с $n-1$ слагаемыми, но законы верны для сумм с двумя слагаемыми, откуда и следует их общность.

Во-вторых, полагая

$$M=(a_1+a_2+\ldots+a_n),\quad N=(b_1+b_2+\ldots+b_m),$$

получим:

$$MN=(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_m)=(a_1+a_2+\ldots+$$
$$+a_n)\,N=a_1N+a_2N+\ldots+a_nN \text{ (дистрибутивность)}$$
$$=a_1(b_1+b_2+\ldots+b_m)+\ldots+a_n(b_1+b_2+\ldots+b_m)=$$
$$=(a_1b_1+a_1b_2+\ldots+a_1b_m)+\ldots+(a_nb_1+a_nb_2+\ldots+a_nb_m)$$
(дистрибутивность)
$$=a_1b_1+a_1b_2+\ldots+a_nb_m \text{ (ассоциативность).}$$

В этом рассуждении существенно выполнение основных законов действий, но не важно, какую природу имеют слагаемые a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., b_m.

Примечание. При перемножении алгебраических сумм необходимо учитывать знаки перемножаемых членов. Так например, произведение вторых членов алгебраических сумм $M-N+P$ и $R-S$ есть: $(-N)(-S)=NS$.

В качестве следующего примера проследим применение законов действий к выводу правила вычитания многочленных выражений:

$$(A+B-C)-(M-N+P)=(A+B-C)+[(-1)(M-N+P)]=$$
$$=(A+B-C)+[(-1)M-(-1)N+(-1)P] \quad \text{(дистрибутивность)}$$
$$=(A+B-C)+(-M+N-P)=A+B-C-M+(N-P)=$$
$$=A+B-C-M+N-P \quad \text{(ассоциативность сложения)}.$$

Мы получили известное правило: *при вычитании алгебраической суммы достаточно приписать к членам выражения-уменьшаемого члены выражения-вычитаемого с обратными знаками.*

Читая выкладки в обратном порядке, получаем правило заключения части алгебраической суммы в скобки с вынесением за скобки знака —.

§ 6. Числовые кольца и поля

Арифметическое действие называется выполнимым в данном числовом множестве, если число, получающееся в результате его выполнения, принадлежит тому же множеству.

Примеры: 1) В множестве натуральных чисел 1, 2, 3, ..., n, ... выполнимы действия сложения и умножения, так как сумма и произведение натуральных чисел суть также натуральные числа. Действия вычитания и деления не всегда выполнимы в этом множестве. В самом деле, разность между меньшим и бо́льшим натуральными числами не есть натуральное число; частное от деления, например, чисел 5 и 3 не есть целое число.

2) В множестве всех целых чисел

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

выполнимо действие вычитания. Действие деления выполнимо не всегда.

3) В множестве всех положительных чисел (целых и дробных) выполнимо действие деления. Действие вычитания выполнимо не всегда.

4) В множестве всех рациональных чисел выполнимы все четыре арифметические действия, за исключением деления на 0.

***Определение* I.** *Числовое множество называется кольцом, если в нем выполнимы действия сложения, умножения и вычитания.*

***Определение* II.** *Числовое множество, содержащее хотя бы одно число отличное от нуля, называется полем, если в нем выполнимы действия сложения, вычитания, умножения и деления, за исключением деления на* 0.

Из определения ясно, что числовое поле является таким кольцом, в котором выполнимо действие деления (кроме деления на нуль).

Понятиям числовых кольца и поля можно дать следующую более подробную характеристику: *В кольце и поле выполнимы действия сложения и умножения, обладающие свойствами* (I) (см. предыдущий §). *В кольце и поле при любых a и b разрешимо уравнение $a+x=b$ (выполнимость вычитания). В поле при любом $a\neq 0$ и произвольном b разрешимо уравнение $ax=b$ (выполнимость деления).*

Примеры: 1) Множество всех целых чисел ..., —2, —1, 0, 1, 2 ... есть кольцо.

2) Множество чисел, кратных данному числу m:

$$\ldots -2m,\ -m,\ 0,\ m,\ 2m,\ \ldots$$

есть кольцо. В самом деле, сумма, произведение и разность чисел, кратных m, есть число кратное m:

$$km + k_1m = (k+k_1)\,m;\quad km \cdot k_1m = (kk_1m)\cdot m;\quad km - k_1m = (k-k_1)\,m.$$

В частности, множество четных чисел есть кольцо.

Множества ... —6, —3, 0, 3, 6 ... и ... —14, —7, 0, 7, 14, ... суть кольца. Каждое из них есть часть кольца всех целых чисел.

3) Множество, состоящее лишь из одного числа 0, есть кольцо, ибо $0+0=0$; $0\cdot 0=0$; $0-0=0$. Это кольцо называется нулевым кольцом.

4) Множество нечетных чисел ... — 3, —1, 1, 3, ... не есть кольцо, ибо сумма двух нечетных чисел есть число четное.

5) Множество всех рациональных чисел есть поле.

Теорема. *Всякое числовое кольцо содержит нуль.*

Доказательство. Если в данном кольце содержится некоторое число a, то, в силу выполнимости вычитания, в кольце содержится и разность $a-a=0$, ч. т. д.

Нулевое кольцо (см. пример 3) как содержащееся во всяком другом кольце, называется минимальным кольцом. Нуль в кольце обладает следующим основным свойством: *сумма любого числа a и числа* 0 *равна числу a*:

$$a+0=a.$$

Теорема. *Если кольцо содержит число a, то оно содержит и все числа кратные a:*

$$\ldots -3a,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ 3a\ldots$$

Доказательство. В силу выполнимости сложения кольцо должно содержать все числа вида $a+a=2a$, $2a+a=3a$ и т. д. и вообще $(k-1)\,a+a=ka$.

В силу выполнимости вычитания кольцо содержит число $-a$, противоположное a, а также все числа вида $-2a$, $-3a$, ..., ибо $-a=0-a$, $-2a=0-2a$, $-3a=0-3a$ ..., ч. т. д.

Теорема. *Всякое числовое поле содержит все рациональные числа.*

Поэтому множество рациональных чисел называется минимальным числовым полем.

Доказательство. Числовое поле, будучи кольцом, содержит число 0. Пусть a какое-либо число поля, отличное от нуля. В силу выполнимости деления, поле содержит частное $\frac{a}{a}$, т. е. единицу.

В силу предыдущей теоремы, поле должно содержать все целые числа: ... —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ... Наконец, в силу выполнимости деления, поле должно содержать все дробные числа $\frac{m}{n}$, где m и n любые целые числа и $n\neq 0$, ч. т. д.

Из доказанного ясно, что пока мы располагаем лишь рациональными числами, невозможно привести пример какого-либо другого числового поля.

§ 7. Скалярные свойства действий

Поле рациональных чисел называют расположенным полем, потому что его элементы подчиняются законам скалярного расположения (см. § 3, свойства I—V). Взаимоотношения между арифметическими действиями и законами скалярного расположения характеризуются скалярными свойствами действий. Мы укажем ниже основные скалярные свойства действий (подробно см. главу VI).

Теорема. *Разность $a-b$ положительна, если a больше b, отрицательна, если a меньше b, равна 0, если $a=b$.*

Доказательство. 1° Пусть $a>b$. Если a и b оба положительны, то $a-b>0$; это известно из арифметики. Если число a положительно, а b отрицательно или равно 0, то $a-b>0$, ибо вычитание b равносильно прибавлению противоположного числа $-b$, а последнее неотрицательно. Если число a отрицательно или равно 0, то число b также отрицательно и $|a|<|b|$. В этом случае вычитание числа b сводится к прибавлению положительного числа $-b$ и так как $|a|<|b|$, то $a-b=a+(-b)>0$.

2° Пусть теперь $a<b$. Так как $b>a$, то разность $b-a$ положительна, но тогда противоположное число $a-b$ отрицательно.

3° Если $a=b$, то имеем $a-b=0$, ч. т. д.

Итак имеем

$$a-b\begin{cases}>0 & (\text{если } a>b)\\ <0 & (\text{если } a<b)\\ =0 & (\text{если } a=b).\end{cases}$$

Конкретный смысл теоремы следующий. Изменение значения данной направленной величины при переходе от значения, равного b, к значению, равному a, выражается разностью $a-b$. При $a>b$ имеем увеличение, в соответствии с этим разность $a-b$, выражающая изменение, является положительной. При $a<b$ имеем уменьшение, в соответствии с чем разность $a-b$ отрицательна.

Для сложения и умножения имеют место следующие законы монотонности:

1° *Если* $a<b$, то $a+c<b+c$.

Доказательство. Если $a<b$, то $b-a>0$, а потому $(b+c)-(a+c)=b-a>0$, откуда $a+c<b+c$.

2° *Если* $a<b$ и $c>0$, *то* $ac<bc$.

Доказательство. $b-a>0$, откуда $bc-ac=(b-a)c>0$ и, следовательно, $ac<bc$.

При оперировании с неравенствами существенны следующие основные правила:

1. *Правило почленного сложения:*
если $a<b$ и $c<d$, *то* $a+c<b+d$.

Доказательство. Имеем: $a<b$, а потому $a+c<b+c$, аналогично из неравенства $c<d$ получим: $c+b<d+b$, следовательно, $a+c<b+d$, ч. т. д.

2. *Правило почленного умножения неравенств:*
если b *и* c *положительны,* $a<b$ *и* $c<d$, *то* $ac<bd$.

Доказательство. В самом деле, $ac<bc$ и $cb<db$, откуда $ac<bd$, ч. т. д.

Глава II

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 8. Общие понятия

Всякое математическое выражение является символической записью совокупности математических операций, которые следует произвести в определенной последовательности над числами, обозначенными буквами или цифрами, чтобы получить численное значение данного выражения. Буквы, входящие в выражение, могут играть двоякую роль:

во-первых, буквам можно приписывать различные числовые значения, такие буквы будем называть буквами-аргументами.

во-вторых, буквы могут обозначать вполне определенные и неизменные в процессе данного рассуждения числа.

Рассмотрим, например, выражение длины окружности в зависимости от ее радиуса $S=2\pi R$. Буква R обозначает величину радиуса, ей можно приписывать произвольное положительное значение, тогда как π обозначает вполне определенное число — отношение длины окружности к диаметру.

Для букв-аргументов должно быть задано множество их допустимых значений. Пусть, например, комната вмещает a человек, тогда в трех таких комнатах помещается $3a$ человек. Здесь для буквы a допустимы лишь целые положительные значения. В выражении длины окружности $S=2\pi R$ для R допустимы произвольные положительные значения. В формуле пути $s=vt$ для прямолинейного равномерного движения скорость v (в зависимости от ее направления) может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Каждой допустимой системе численных значений букв-аргументов соответствует вполне определенное численное значение математического выражения, поэтому *математическое выражение является функцией букв-аргументов.*

Общее определение понятия функции формулируется следующим образом:

y — есть функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой допустимой системе значений аргументов соответствует некоторое вполне определенное значение y

Таким образом, функция определяется заданием допустимых значений для аргументов и законом соответствия. Совершенно не обязательно, чтобы закон соответствия между значениями аргументов и значением функции был задан при помощи неко-

торого математического выражения (формулы). Понятие функции является более общим, и его не следует смешивать с понятием математического выражения. Рассмотрим следующий пример: если x есть число целое, то поставим ему в соответствие число $y=1$, если x число дробное (не целое), то поставим ему в соответствие число $y=0$. Так, числу $x=1$ соответствует $y=1$, числу $x=2$ соответствует $y=1$, числу $x=3$ соответствует $y=1$, числу $x=\frac{1}{2}$ соответствует $y=0$ и вообще

$$y=\begin{cases} 1 \text{ (если } x \text{ целое)} \\ 0 \text{ (если } x \text{ дробное).} \end{cases}$$

Здесь функция задана не математическим выражением (формулой), а описанием закона соответствия. Для аргумента x допустимым является произвольное рациональное значение.

Множество допустимых значений для аргументов может быть различным. Поставим, например, всякому натуральному числу n в соответствие число $y=1\cdot2\cdot3\ldots n=n!$ Для этой функции допустимыми являются не произвольные рациональные, а лишь натуральные значения аргумента. Множество допустимых значений аргумента n образует множество всех натуральных чисел.

Изучение функций на основе сформулированного общего определения Лобачевского относится к курсу математического анализа. Элементарная алгебра рассматривает лишь частный вид функций, для которых закон соответствия может быть задан при помощи ряда вполне определенных рассматриваемых в элементарной алгебре математических операций.

Определение. *Два математические выражения называются тождественными, если их численные значения равны при произвольной допустимой системе численных значений входящих в них букв. Цифровые выражения (не содержащие букв) считаются тождественными, если они имеют одно и то же значение.*

Замена данного выражения другим, ему тождественным, называется тождественным преобразованием.

Понятие тождественности двух выражений, содержащих буквы, является относительным: *при одном множестве допустимых значений букв-аргументов данные выражения могут быть, а при другом — не быть тождественными.*

Так, например, при произвольном неотрицательном значении x имеем $|x|=x$. Поэтому выражения x и $|x|$ тождественны при условии, что допустимыми значениями x считаются произвольные неотрицательные числа. Коротко говорят, что x и $|x|$ тождественны в множестве всех неотрицательных чисел. В множестве всех рациональных чисел эти выражения перестают быть тождественными: если принять для x допустимыми и отрицательные значения, то равенство $|x|=x$ имеет место не при всех x, ибо если $x<0$, то $|x|=-x$.

Для обозначения тождественности двух выражений наряду со знаком равенства употребляют символ $\equiv$.

Простейшими тождествами справедливыми в множестве всех рациональных чисел являются формулы, выражающие основные законы арифметических действий (I) (§ 1, стр. 8). Соотношения, вытекающие как следствия из этих основных законов, также являются тождествами в множестве всех рациональных чисел. Примерами таких тождеств являются правила действий над многочленными выражениями (алгебраическими суммами). В частности тождествами являются формулы сокращенного умножения:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2; \quad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2;$$
$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3; \quad x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$$

и т. д.

При преобразовании выражений, содержащих дроби, следует исключать из множества допустимых значений значения букв, обращающих в 0 хотя бы один из знаменателей.

Примеры: 1) Проследим применение свойств действий к обоснованию приведения подобных членов в многочленном алгебраическом выражении. Рассмотрим, например, выражение

$$2a^2b + \frac{c}{d} - \frac{3}{2}a^2b + 4\frac{c}{d} + a^2b = 2a^2b - \frac{3}{2}a^2b + a^2b + \frac{c}{d} + 4\frac{c}{d}$$

(коммутативность)

$$= \left(2a^2b - \frac{3}{2}a^2b + a^2b\right) + \left(\frac{c}{d} + 4\frac{c}{d}\right) \quad \text{(ассоциативность)}$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2} + 1\right)a^2b + (1 + 4)\frac{c}{d} \quad \text{(дистрибутивность)}$$

$$= \frac{3}{2}a^2b + 5\frac{c}{d}.$$

2) Равенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{(x-1)(2-x)}$$

есть тождество при всех значениях x, отличных от 1 и от 2. Числа 1 и 2 следует исключить из множества допустимых значений x.

3) Найдем выражение для квадрата суммы с любым числом слагаемых. При умножении суммы $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ на сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ надо составить сумму $\sum a_k a_l$ всевозможных произведений каждого члена множимого на каждый член множителя. В этой последней сумме содержатся квадраты каждого из слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_n$: при $k = l$ имеем $a_k a_l = a_k^2$. Если $k \neq l$, то произведению $a_k a_l$ k-го члена множимого на l-й член множителя соответствует равное (в силу закона коммутативности) произведение l-го члена множимого на k-й член множителя; объединяя равные слагаемые, получим тождество:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

4) Преобразовать произведение

$$(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a).$$

Решение. Сгруппировав сомножители, как показано ниже, применим формулу умножения суммы на разность:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \equiv$$
$$\equiv [(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]\cdot[c+(a-b)]\cdot[c-(a-b)] \equiv$$
$$\equiv [(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2] \equiv [a^2+b^2-c^2+2ab]\,[c^2-a^2-b^2+2ab] \equiv$$
$$\equiv [2ab+(a^2+b^2-c^2)]\,[2ab-(a^2+b^2-c^2)] \equiv 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \equiv$$
$$\equiv 4a^2b^2-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 \equiv$$
$$\equiv 2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

5) Доказать тождество Лагранжа:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \equiv$$
$$\equiv (bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

Решение. Вычисляем левую часть:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \equiv a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+$$
$$+c^2x^2+c^2y^2;$$
$$(ax+by+cz)^2 \equiv a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz.$$

Вычитая почленно, находим: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \equiv$
$$\equiv (b^2z^2+c^2y^2-2bcyz)+(c^2x^2+a^2z^2-2acxz)+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy) \equiv$$
$$\equiv (bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

§ 9. Рациональные выражения

Определение. *Математическое выражение, составленное из чисел, обозначенных буквами или цифрами, при помощи четырех арифметических действий, называется рациональным алгебраическим выражением* *.

Примерами рациональных выражений могут служить:

$$\frac{ax+b}{cx+d};\quad 2a^2-\frac{3}{a}x+5;\quad \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{ab}{x+y}}{a^2+b^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Если не сделано специальных указаний, то допустимыми значениями для аргументов рационального выражения будем считать все те значения, при которых данное выражение имеет смысл, т. е. когда *ни один из знаменателей, входящих в него дробей, не обращается в нуль.*

---

* Элементарная арифметика рассматривает действия с конечным числом компонентов. Символ, содержащий указание на необходимость выполнения действий в бесконечном числе, как, например, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, без дополнительного определения, не имеет никакого смысла, ибо само по себе непонятно, что значит сложить бесконечное количество слагаемых. Таким образом, в определении подразумеваются действия лишь с конечным числом компонентов.

Примечание I. Возведение в степень рассматривается как частный случай умножения, поэтому, например, такие выражения, как x^3, a^3, $\frac{x^2+3a}{x^2+a^2}$, являются рациональными. Однако выражения, содержащие буквы-аргументы в показателях степени, не считаются рациональными. Так, например, выражения 2^x, 3^a, -2^b, $\frac{5^{\frac{1}{x}}+2x}{2}$ не являются рациональными.

Примечание II. Выражения, не имеющие численного значения ни при каких значениях букв, как, например, $\frac{a+b}{0}$; $\frac{a-1}{a-a}$; $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-y^2-2xy}$, не считаются рациональными, а рассматриваются как не имеющие смысла.

Определение. *Функция называется рациональной, если ее закон соответствия может быть задан при помощи некоторого рационального выражения.*

Так, например, функция, заданная следующим законом соответствия: „если x — любое число, то соответствующее значение y есть произведение числа x самого на себя“, является рациональной, ибо ее закон соответствия выражается формулой $y=x^2$. Всякое рациональное выражение, рассматриваемое как функция букв-аргументов, является рациональной функцией.

Примеры: 1) Для выражения $\frac{1}{a-b}$ допустимой является любая система отличных друг от друга чисел. Например, если $a=3$, $b=2$, то соответствующее значение выражения есть 1; если $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$, то значение выражения равно $-\frac{2}{3}$.

Системы $a=3$, $b=3$ и $a=-1$, $b=-1$ не являются допустимыми.

2) Для выражения $\frac{1}{a^2-b^2}$ допустима любая система значений a и b, отличных по абсолютной величине, например, $a=2$, $b=3$; $a=-1$, $b=4$; любая система чисел, равных по абсолютной величине, не является допустимой, например, $a=2$, $b=-2$; $a=1$, $b=1$.

3) Для выражения $\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x^2+\frac{1}{x}}$ значения 0 и -1 не являются допустимыми.

4) Для выражения $\frac{(x-y)^2}{x-y}$ допустима любая система неравных между собой чисел: $x \neq y$.

Определение. *Рациональное выражение называется целым выражением или многочленом, если оно не содержит действия деления на выражения, содержащие буквы-аргументы.*

Тем же термином „многочлен" называется функция букв-аргументов, определяемая целым рациональным выражением.

Рациональные выражения, содержащие действия деления на буквенные выражения, называются дробными.

Так, например, выражения $x^3+\frac{3}{4}x^2-2x+3$; $(x-1)^2+3$; $(x+a)(x-b^2)^2$; $\frac{x^2-y^2}{2}$; x^3a^3 — целые, а выражения

$$\frac{x+a}{x-a};\quad \frac{\frac{x+1}{x-1}+2}{\frac{x^2-y^2}{2}+3}$$

дробные.

Классификация рациональных выражений на целые и дробные дана по внешнему виду. Так, например, выражение $\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ мы рассматриваем как дробное, однако, оно тождественно целому выражению x^2+1 (о тождественности рациональных выражений ниже, в § 22).

Классификация рациональных выражений производится по отношению к буквам-аргументам. Например, выражение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}$$

дробное относительно совокупности всех входящих в него букв x, y, a, b. Это же выражение является целым относительно букв x и y, если считать, что каждая из букв a и b имеет вполне определенное численное значение.

Всякое целое выражение последовательным применением законов действий (раскрытие скобок, приведение подобных членов и пр.) может быть преобразовано в тождественную ему сумму слагаемых (членов), каждое из которых является либо числом, обозначенным цифрами, либо произведением числового коэффициента и степеней отдельных букв*.

Эти слагаемые называются одночленами.

Определение. *Одночленом называется целое рациональное выражение, составленное из букв-аргументов и чисел посредством только действия умножения. Одночленом считается также всякое число, обозначенное цифрами или отдельной буквой.*

Итак, *одночлен есть произведение, состоящее из коэффициента, обозначенного цифрами, и одной или нескольких букв, взятых каждая в определенной степени, а также всякое число, обозначенное цифрами, либо буквой.*

Многочлены по количеству членов разделяются на одночлены, двучлены, трехчлены и т. д. Всякий одночлен, будучи целым

* Не исключена возможность, что в окончательном выражении останется всего лишь один член данного вида. Для членов, не содержащих коэффициента, выраженного цифрами, всегда можно условиться считать этот коэффициент равным 1 или —1, например, $a^2=1\cdot a^2$.

рациональным выражением, является частным случаем многочлена; всякий многочлен, содержащий более одного члена, можно рассматривать как сумму одночленов *.

Примеры: 1) Целое рациональное выражение $(x+y)(x+2y)-\frac{x+y}{2}$ есть многочлен. После элементарных преобразований оно примет вид $x^2+3xy+2y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$. Члены данного многочлена суть x^2, $3xy$, $2y^2$, $-\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{2}y$.

2) Выражения 5; $2a^2x^3$; x^3yz^2; $ax+b$; x^2+y^2; x^2+xy+y^4; $x^3-5x^2a+7xa^2-a^3$ суть многочлены. Первые три одночлены, следующие два — двучлены, следующее за ними трехчлен.

3) Выражения $\frac{a}{x}$; $\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{1-x}+b$ дробные, поэтому они не являются ни одночленами ни многочленами.

4) Выражение 2^x+3x, содержащее букву-аргумент x в показателе степени, не является многочленом.

5) Выражение $(x-y)(x+2y)$ есть многочлен, но не одночлен.

Правила действий над одночленами и многочленами устанавливаются на основании общих законов арифметических действий применительно к произведениям и алгебраическим суммам.

Примеры:

1) $(2x^3a^2)\left(\frac{1}{3}x^5a\right)=2x^3a^2\frac{1}{3}x^5a$ (ассоциативность)

$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\cdot x^5\cdot a^2\cdot a$ (коммутативность)

$=\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)(x^3\cdot x^5)(a^2\cdot a)$ (ассоциативность)

$=\frac{2}{3}x^8a^3$.

2) $(2x^2+ax)+(3x-5a)x=(2x^2+ax)+(3x^2-5ax)$ (дистрибутивность)

$=2x^2+ax+3x^2-5ax$ (ассоциативность)

$=2x^2+3x^2+ax-5ax$ (коммутативность)

$=(2x^2+3x^2)+(ax-5ax)$ (ассоциативность)

$=5x^2-4ax$ (дистрибутивность).

Примечание. Мы ввели понятия рационального выражения и многочлена „над полем рациональных чисел", считая все числа и допустимые значения букв-аргументов, входящих в данное выражение, рациональными. Это ограничение вызвано лишь тем обстоятельством, что пока мы еще не знаем никаких других чисел,

* В соответствии с определением, принятым в современной алгебре мы рассматриваем многочлен как целую рациональную функцию букв-аргументов. Это определение не совпадает с определением многочлена, принятым в школьном учебнике Киселева. С точки зрения принятой классификации „дробные" многочлены (или одночлены) не могут считаться многочленами (или одночленами).

кроме рациональных. Однако в дальнейшем, при расширении поля рациональных чисел, представится возможность рассматривать рациональные функции и многочлены в других числовых областях (например, над полем действительных или комплексных чисел).

§ 10. Теорема о тождественности двух многочленов

В ближайших последующих параграфах мы будем изучать многочлены с одним аргументом. Всякий многочлен с аргументом x может быть представлен (после выполнения тождественных преобразований) в следующем, так называемом каноническом виде:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1},\ldots, a_0$ — некоторые определенные рациональные числа, а n некоторое определенное натуральное число. Если $a_n\neq 0$, то число n называется степенью многочлена. Если все коэффициенты, кроме a_0, обращаются в 0, то $f(x)$ обращается в отличное от 0 число a_0. На этом основании условимся *всякое отличное от нуля число рассматривать как многочлен нулевой степени.* Если все коэффициенты обращаются в нуль, то имеем:

$$f(x)=0x^n+0x^{n-1}+\ldots+0x+0;$$

такой многочлен называется нуль-многочленом. Нуль-многочлену *не приписывается никакой степени.* Нуль-многочлен тождественно равен 0, так как при всех x его значение равно 0. Докажем, что справедливо обратное утверждение:

Теорема. *Если при всех значениях x значение многочлена $f(x)$ равно нулю, то все его коэффициенты равны нулю.*

Доказательство проводится методом полной индукции. Убедимся в справедливости теоремы для многочленов первой степени:

$$f(x)=a_1x+a_0.$$

Если при всех значениях x имеем $a_1x+a_0=0$, то, полагая $x=0$, получим $a_0=0$ и, следовательно, $a_1x=0$. Полагая $x=1$, получим $a_1=0$. Предположим, что теорема верна для многочленов степени ниже n, покажем, что в этом предположении она будет верна и для многочленов n-й степени.

Пусть при всех значениях x

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\equiv 0. \qquad (1)$$

Заменяя в равенстве (1) x на $2x$, получим тождество:

$$f(2x)=2^na_nx^n+2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+2a_1x+a_0\equiv 0. \qquad (2)$$

Умножив тождество (1) на 2^n, после почленного вычитания из него (2), получим:

$$2^{n-1}(2-1)\,a_{n-1}x^{n-1}+2^{n-2}(2^2-1)\,a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+(2^n-1)a_0\equiv 0.$$

По предположению многочлен степени низшей, чем n, тождественно равен 0, лишь когда все его коэффициенты равны 0:

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1}=0, 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2}=0, \ldots, 2^{n-k}(2^k-1)a_{n-k}=0, \ldots,$$
$$(2^n-1)a_0=0.$$

Так как $2^{n-k}\neq 0$ и $2^k-1\neq 0$, то $a_{n-1}=a_{n-2}=\ldots=a_0=0$, но тогда тождество (1) принимает вид $a^nx^n\equiv 0$. Полагая $x=1$, получим $a_n=0$.

Будучи верной для многочленов 1-й степени, теорема верна для многочленов 2-й, а следовательно, и 3-й степени, и так далее, а потому она верна для многочленов любой степени, ч. т. д.

Теорема о тождественности многочленов. *Необходимым и достаточным условием тождественности двух многочленов*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

и

$$\varphi(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

является равенство их соответствующих коэффициентов: $n=m$ и

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots,\ a_n=b_m.$$

Доказательство. 1) Условие достаточно. В самом деле, если соответствующие коэффициенты данных многочленов одинаковы, то при всяком значении x равны и значения многочленов, ибо по сути дела мы имеем одно и то же, а не два различные выражения.

2) Условие необходимо. Если при всех рациональных значениях x значения многочленов $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ и $\varphi(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0$ * одинаковы, то, вычитая почленно значения $f(x)$ и $\varphi(x)$, при всех рациональных x получим:

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_0-b_0)\equiv 0.$$

В силу предыдущей теоремы $a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\ldots=a_1-b_1=a_0-b_0=0$, откуда $a_n=b_n$, $a_{n-1}=b_{n-1},\ldots,a_0=b_0$, ч. т. д.

Пример: Расположить многочлен x^2+3x+2 по степеням $x-1$. Ищем для данного многочлена выражение в следующем виде: $x^2+3x+2\equiv A(x-1)^2+B(x-1)+C$, где A, B и C искомые коэффициенты. Раскрывая скобки и перегруппировывая члены в правой части, получим:

$$x^2+3x+2\equiv Ax^2-(2A-B)x+C+A-B.$$

По теореме о тождественности соответствующие коэффициенты должны быть равны:

$$A=1,\ -2A+B=3,\ A-B+C=2,$$

откуда

$$A=1,\ B=5,\ C=6 \text{ и } x^2+3x+2\equiv(x-1)^2+5(x-1)+6.$$

---

* Мы пишем в обоих многочленах старшие члены одной и той же степени n, ибо всегда возможно в многочлене низшей степени добавить недостающее количество членов с коэффициентами, равными нулю.

§ 11. Кольцо многочленов

Пусть даны два многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

и

$$\varphi(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0.$$

Предположим для определенности, что $n\geqslant m$. Складывая и умножая $f(x)$ и $\varphi(x)$ по общим правилам сложения и умножения алгебраических сумм, получим:

$$f(x)+\varphi(x)=a_nx^n+\ldots+(a_m+b_m)x^m+\ldots+(a_0+b_0). \quad (1)$$

$$f(x)\varphi(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\ldots+a_0b_0. \quad (2)$$

Значения многочленов в правых частях равенств (1) и (2) равны соответственно сумме и произведению значений многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. По теореме о тождественности, кроме (1) и (2), *никаких многочленов с другими коэффициентами не может существовать, значения которых при всех рациональных x были бы соответственно равны сумме и произведению значений $f(x)$ и $\varphi(x)$.*

Определение. *Многочлены $f(x)+\varphi(x)$ и $f(x)\varphi(x)$, определяемые формулами (1) и (2), называются суммой и произведением многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.*

Отметим, что теперь объектами, над которыми выполняются действия, а также результатами действий являются не числа, а многочлены. Основные характеристические свойства сложения и умножения остаются в силе и для многочленов:

$$f(x)+\varphi(x)\equiv\varphi(x)+f(x) \text{ (коммутативность сложения)}$$

$$[f(x)+\varphi(x)]+\psi(x)\equiv f(x)+[\varphi(x)+\psi(x)] \text{ (ассоциативность сложения)}$$

$$f(x)\varphi(x)\equiv\varphi(x)f(x) \text{ (коммутативность умножения)}$$

$$[f(x)\varphi(x)]\psi(x)\equiv f(x)[\varphi(x)\psi(x)] \text{ (ассоциативность умножения)}$$

$$[f(x)+\varphi(x)]\psi(x)\equiv f(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi(x) \text{ (дистрибутивность).}$$

Так, например, многочлены $f(x)+\varphi(x)$ и $\varphi(x)+f(x)$ тождественны, ибо, в силу закона коммутативности сложения чисел, их численные значения равны при всех значениях x. По теореме о тождественности эти многочлены имеют соответственно равные коэффициенты. В этом можно убедиться и непосредственно, подсчитав коэффициенты обоих многочленов.

Вычитание многочленов определяется как действие, обратное сложению. Многочленом-разностью $f(x)-\varphi(x)$ называется многочлен $\psi(x)\equiv c_0+c_1x+\ldots$, удовлетворяющий условию:

$$f(x)\equiv\varphi(x)+\psi(x);$$

приравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$a_0 = b_0 + c_0,\ a_1 = b_1 + c_1,\ a_2 = b_2 + c_2 \text{ и т. д.},$$

откуда $c_0 = a_0 - b_0,\ c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2$ и т. д.

Как легко видеть, вычитание многочлена $\varphi(x)$ равносильно прибавлению многочлена $-\varphi(x) = -b_0 - b_1x - b_2x^2 - \ldots - b_mx^m$.

Коэффициенты многочленов суммы, произведения и разности получаются из коэффициентов данных многочленов посредством сложения, вычитания и умножения. Следовательно, если коэффициенты данных многочленов принадлежат некоторому числовому кольцу, то коэффициенты суммы, разности и произведения принадлежат тому же кольцу. Так, например, сумма, произведение и разность многочленов с целыми коэффициентами суть также многочлены с целыми коэффициентами. Сумма, произведение и разность многочленов с четными коэффициентами суть многочлены с четными коэффициентами. Сумма, произведение и разность многочленов с рациональными коэффициентами суть многочлены с рациональными коэффициентами.

Множество многочленов с рациональными коэффициентами обладает всеми свойствами числового кольца: в нем выполнимы действия сложения, умножения и вычитания, обладающие теми же свойствами, которые присущи этим действиям в числовом кольце.

Множество многочленов с рациональными коэффициентами называется кольцом многочленов над полем рациональных чисел.

В кольце многочленов аналогом нуля является нуль-многочлен: $0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0$. При любом многочлене $f(x)$ справедливы тождества:

$$f(x) + 0(x) \equiv f(x) \text{ и } f(x)\,0(x) = 0(x).$$

Примечание. Всякое рациональное число можно рассматривать как многочлен (стр. 36), поэтому поле рациональных чисел содержится как часть в кольце многочленов с рациональными коэффициентами.

В современной алгебре изучаются операции не только над числами. Пусть дано некоторое множество объектов (не обязательно чисел) *алгебраической операцией, определенной в этом множестве, называется правило, по которому всяким двум элементам данного множества, взятым в определенном порядке, ставится в соответствие некоторый элемент того же множества.* Под кольцом подразумевается некоторое множество (не обязательно числовое), в котором:

1° *определены две операции, называемые сложением* и *умножением, подчиняющиеся основным законам действий;*

2° *выполнима операция, обратная сложению (вычитание).* (Подробнее об общем понятии кольца см. гл. VII.)

Примерами колец, элементами которых не являются числа, могут служить: множество многочленов с целыми коэффициентами; множество многочленов с коэффициентами, кратными данному числу k; множество

многочленов с рациональными коэффициентами. Множество многочленов с натуральными (или с положительными) коэффициентами не является кольцом (не всегда выполнимо вычитание). Множество двучленов вида $kx+b$ не образует кольца. В самом деле сумма и разность двух двучленов 1-й степени имеют тот же вид, однако, произведение

$$(kx+b)(k_1x+b_1)=kk_1x^2+(kb_1+k_1b)x+bb_1$$

при $k\neq 0$ и $k_1\neq 0$ не является двучленом 1-й степени. Множество многочленов четной степени вместе с нуль-многочленом образуют кольцо. Множество многочленов нечетной степени не есть кольцо.

Пусть известно, что в каждой из нескольких рассматриваемых систем математических объектов имеют место некоторые соотношения. Тогда следствия, вытекающие из этих (и только лишь из этих) соотношений, одинаковы во всех данных системах. Поэтому, если эти следствия известны для одной системы, то нет надобности заново доказывать их для других систем.

Характеризуя кольцо основными свойствами 1° и 2°, современная алгебра не интересуется природой элементов, образующих кольцо (это могут быть числа, многочлены или что-либо другое). Следствия, вытекающие из основных характеристических свойств, одинаковы для всех колец, и современная алгебра стремится „раз и навсегда" вывести эти следствия. Разумеется, что всякое индивидуальное кольцо, кроме общих свойств, может обладать специфическими, ему присущими свойствами, не вытекающими исключительно из характеристических свойств 1° и 2°.

§ 12. Делимость многочленов

Определение делимости. *Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$, если существует третий многочлен $\psi(x)$ такой, что имеет место тождество:*

$$f(x)\equiv\varphi(x)\psi(x); \tag{1}$$

многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются делителями $f(x)$.

Так, например, многочлен x^2-4 делится на $x-2$, ибо $x^2-4=(x-2)(x+2)$, многочлены $x-2$ и $x+2$ суть делители x^2-4.

Пусть c любое, отличное от нуля, число; имеем:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$$
$$=c\left(\frac{a_n}{c}x^n+\frac{a_{n-1}}{c}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{c}x+\frac{a_0}{c}\right).$$

Следовательно, всякое отличное от нуля число есть делитель любого многочлена; всякий многочлен, коэффициенты которого отличаются от коэффициентов данного многочлена неравным нулю числовым множителем, есть делитель данного многочлена. Эти делители называются тривиальными делителями в отличие от прочих делителей, называемых нетривиальными.

Пример. Многочлены $x-1$; $x+1$; x^3+x^2+x+1; x^3-x^2+x-1; x^2-1; x^2+1 являются нетривиальными делителями многочлена x^4-1, так как x^4-1 делится на каждый из них:

$$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1);\ x^4-1=$$
$$=(x+1)(x^3-x^2+x-1);\ x^4-1=(x^2-1)(x^2+1),$$

и коэффициенты при одинаковых степенях аргумента непропорциональны.

Многочлены $2x^4-2$ и $\frac{x^4-1}{3}$ суть тривиальные делители x^4-1, имеем

$$x^4-1=\frac{1}{2}(2x^4-2) \text{ и } x^4-1=3\left(\frac{x^4}{3}-\frac{1}{3}\right).$$

Операция деления не всегда выполнима в кольце многочленов с рациональными коэффициентами. Пусть, например, степень многочлена-делимого $f(x)$ меньше степени многочлена-делителя $\varphi(x)$, тогда ни при каком $\psi(x)\neq 0$ тождество (1) не может иметь места, ибо степень произведения $\varphi(x)\psi(x)$ не ниже степени $\varphi(x)$ и не может быть равной степени $f(x)$.

В кольце многочленов может быть построена теория делимости, аналогичная теории делимости целых чисел.

Определение. *Многочлен $f(x)$ (не являющийся числом) с рациональными коэффициентами называется неприводимым над полем рациональных чисел, если он не имеет никаких делителей (с рациональными коэффициентами), отличных от тривиальных.*

Многочлен $f(x)$ называется приводимым над полем рациональных чисел, если он может быть представлен в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами, из которых ни один не является тривиальным делителем $f(x)$.

Примеры: 1) Многочлен x^2+6x+5 является приводимым, ибо $x+5$ и $x+1$ суть его нетривиальные делители:

$$x^2+6x+5=(x+5)(x+1).$$

2) Многочлен первой степени $kx+b$ неприводим. В самом деле, нетривиальные делители имеют степень не ниже первой, но тогда их произведение имеет степень не ниже 2-й и не может быть тождественным двучлену 1-й степени.

3) Многочлен x^2+1 неприводим в поле рациональных чисел. В самом деле, если данный многочлен приводим, то его делителями являются двучлены 1-й степени:

$$x^2+1\equiv(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$ac=1,\quad ad+bc=0,\quad bd=1,$$

откуда

$$c=\frac{1}{a};\ d=\frac{1}{b};\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=0$$

и, следовательно, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=-1$. Но последнее невозможно, ибо квадрат никакого рационального числа не может быть равным -1.

Из основных законов действий вытекают следующие теоремы о делимости многочленов:

Теорема. *Если каждый из многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ делится на $\psi(x)$, то сумма $\varphi(x)+f(x)$ делится на $\psi(x)$.*

Доказательство. Имеем

$$f(x)\equiv\psi(x)f_1(x),\quad \varphi(x)\equiv\psi(x)\varphi_1(x),$$

откуда

$$f(x)+\varphi(x)\equiv\psi(x)f_1(x)+\psi(x)\varphi_1(x)\equiv$$
$$\equiv\psi(x)[f_1(x)+\varphi_1(x)]$$ (дистрибутивность), ч. т. д.

Теорема. *Если один из сомножителей делится на $\psi(x)$, то и произведение делится на $\psi(x)$.*

Доказательство. Если $f(x)$ делится на $\psi(x)$, то имеем

$$f(x)\equiv\psi(x)f_1(x),$$ откуда:

$$f(x)\varphi(x)\equiv[\psi(x)f_1(x)]\varphi(x)\equiv\psi(x)[f_1(x)\varphi(x)]$$ (ассоциативность),

ч. т. д.

§ 13. Деление с остатком

Теорема. *Каковы бы ни были два многочлена*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

и

$$\varphi(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

с рациональными коэффициентами, причем $\varphi(x)$ не есть нуль-многочлен, существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1° *степень $r(x)$ меньше m, или $r(x)\equiv0$;*

2° *имеет место тождество:*

$$f(x)\equiv q(x)\varphi(x)+r(x). \qquad (1)$$

Многочлены $q(x)$ и $r(x)$ называются соответственно частным и остатком от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$.

Доказательство. Если $m>n$, то тождество (1) удовлетворяется при $q(x)\equiv0$ и $r(x)\equiv f(x)$. Пусть $n\geqslant m$, разделив старший член многочлена $f(x)$ на старший член $\varphi(x)$ и произведя указанные ниже действия, получим:

$$f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\varphi(x)\equiv[a'_{n-1}x^{n-1}+a'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a'_0], \qquad (2)$$

где $a'_{n-1}=a_{n-1}-\frac{a_n}{b_m}b_{m-1}$ (при $m=n$ следует x^{n-m} заменить на 1), откуда

$$f(x)\equiv\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\varphi(x)+R(x),$$

где через $R(x)$ обозначен многочлен в правой части тождества (2). Пусть n_1 — степень многочлена $R(x)$ и a'_{n_1} — коэффициент при его старшем члене (если $a'_{n-1} \neq 0$, то $n_1 = n-1$). Если $n_1 \geqslant m$, то поступим с $R(x)$ так же, как мы поступали с $f(x)$; получим:

$$f(x) \equiv \left[\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m}\right] \varphi(x) + R'(x).$$

Процесс можно продолжать, пока в остатке не получится многочлен степени ниже m. Это приведет к тождеству:

$$f(x) \equiv q(x)\varphi(x) + r(x). \qquad (1)$$

Покажем, что $q(x)$ и $r(x)$ есть единственная пара многочленов, удовлетворяющих тождеству (1). Допустим, что существует другая пара многочленов $q_1(x)$ и $r_1(x)$, где степень r_1 меньше m и

$$f(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x). \qquad (3)$$

Из тождеств (1) и (3) получаем

$$q(x)\varphi(x) + r(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x)$$

и, следовательно,

$$[q(x) - q_1(x)]\varphi(x) \equiv r_1(x) - r(x). \qquad (4)$$

Последнее возможно при условии $q(x) \equiv q_1(x)$. В самом деле, если многочлены $q(x)$ и $q_1(x)$ не тождественны, то левая часть тождества (4) должна содержать x в степени не меньшей m, тогда как правая часть есть многочлен степени низшей, чем m, что невозможно. Но если $q(x) \equiv q_1(x)$, то $r_1(x) \equiv r(x)$, ч. т. д.

Процесс деления с остатком требует выполнения над коэффициентами многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ четырех арифметических действий, поэтому $q(x)$ и $r(x)$ имеют также рациональные коэффициенты.

В доказательстве теоремы о делении с остатком учащийся без труда узнает обоснование элементарного правила деления многочленов.

Если многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то имеет место тождество $(x) \equiv q(x)\varphi(x)$, в этом случае остаток есть нуль-многочлен:

$$r(x) \equiv 0.$$

Для деления с остатком важно, что коэффициенты многочленов принадлежат числовому полю. Так, например, процесс деления не всегда выполним в кольце многочленов с целыми коэффициентами. В самом деле, вычисление частного и остатка требует деления коэффициентов делимого и промежуточных остатков на коэффициент старшего члена делителя, поэтому коэффициенты частного и остатка могут быть дробными. Процесс деления с остатком всегда выполним в кольце многочленов с целыми коэффициентами, если коэффициент старшего члена делителя равен ± 1.

Теорема Безу.

§ 14. Деление на $x-a$

Рассмотрим важный в приложениях частный случай деления многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

на двучлен $x-a$.

Теорема. *Остаток от деления многочлена на $x-a$ равен значению многочлена при $x=a$:*

$$R=f(a)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\ldots+a_1a+a_0.$$

Доказательство. Искомое частное есть многочлен $n-1$-й степени, а остаток, будучи многочленом степени ниже 1-й, есть число. Следовательно, в тождестве

$$f(x)=(x-a)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0)+R$$

значение остатка $R(x)$ одно и то же при всех значениях x.

Полагая $x=a$, получим $f(a)=R$, ч. т. д.

Пример. Для нахождения остатка от деления многочлена

$$2x^3-3x^2-x+1$$

на $x-2$ подставляем в многочлен $x=2$; имеем:

$$R=2\cdot2^3-3\cdot2^2-2+1=3.$$

Для вычисления коэффициентов частного и остатка от деления многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

на $x-a$ удобно пользоваться следующим приемом. Умножим искомое частное на делителя:

$$\begin{array}{r}
b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0 \\
\hline
b_{n-1}x^n+b_{n-2}x^{n-1}+\ldots+b_1x^2+b_0x \\
-ab_{n-1}x^{n-1}-\ldots\ldots-ab_1x-ab_0 \\
\hline
b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-ab_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(b_0-ab_1)x-ab_0.
\end{array}\qquad x-a$$

Сумма полученного произведения и остатка R должна быть тождественна делимому $f(x)$, следовательно,

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}-ab_{n-1}=a_{n-1},\ b_{n-3}-ab_{n-2}=a_{n-2},\ \ldots,\ R-ab_0=a_0.$$

Откуда находим последовательно:

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\ b_{n-3}=a_{n-2}+ab_{n-2},\ \ldots,\ R=a_0+ab_0.$$

Вычисления обычно располагают в виде следующей схемы:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	. . . .	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	. . . .	R
	$(b_{n-1}=a_n)$	$(=ab_{n-1}+a_{n-1})$	$(=ab_{n-2}+a_{n-2})$		$(=ab_0+a_0)$

Коэффициенты частного и остаток вычисляются путём последовательного заполнения второй строки таблицы.

Примеры: 1) Определить частное и остаток от деления многочлена $2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ на $x - 2$. Составляем таблицу:

2	2	−1	−1	3	−2
	2	3	5	13	24

Находим частное $2x^3 + 3x^2 + 5x + 13$ и остаток 24.

2) Определить частное и остаток от деления многочлена $x^4 - x^2 + 2x - 3$ на $x + 1$. Составляем таблицу (здесь $a = -1$)

−1	1	0	−1	2	−3
	1	−1	0	2	−5

Находим частное $x^3 - x^2 + 2$ и остаток -5.

§ 15. Корни многочлена

Определение. *Число a называется корнем многочлена $f(x)$, если значение многочлена $f(x)$ при $x = a$ равно нулю: $f(a) = 0$.*

Таким образом, всякий корень многочлена является решением уравнения $f(x) = 0$.

Пример. Число -3 есть корень многочлена $2x^3 + 7x^2 + 5x + 6$, так как при $x = -3$ соответствующее значение многочлена равно 0.

Теорема. *Для делимости многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем многочлена $f(x)$.*

Доказательство: Условие необходимо. В самом деле, если $f(x)$ делится на $x - a$, то имеет место тождество

$$f(x) \equiv (x - a)\, q(x).$$

Но при $x = a$ первый множитель, а следовательно и $f(x)$, обращается в нуль.

Условие достаточно. В самом деле, если a есть корень многочлена, то $f(a) = 0$. Но $f(a) = R$ есть остаток от деления $f(x)$ на $x - a$, следовательно, $R = 0$ и $f(x)$ делится на $(x - a)$, ч. т. д.

Пример. Разность n-х степеней $x^n - a^n$ делится на разность $x - a$. В самом деле, полагая $x = a$, имеем $a^n - a^n = 0$.

По схеме деления на двучлен находим коэффициенты частного

a	1	0	0	...	0	$-a^n$
	1	a	a^2	...	a^{n-1}	0

следовательно,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}).$$

При $n=2$ и $n=3$ получим в частности формулы разложений на множители для разности квадратов и разности кубов.

Если n — четное число, $n=2k$, то многочлен $x^{2k}-a^{2k}$ делится на $x+a$, ибо $(-a)^{2k}-a^{2k}=0$. Вычисляя частное (по схеме) получим

$$x^{2k}-a^{2k}=(x+a)(x^{2k-1}-ax^{2k-2}+a^2x^{2k-3}-\ldots-a^{2k-1}).$$

Так, например, $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

Аналогично покажем, что при нечетном $n=2k+1$ многочлен $x^{2k+1}+a^{2k+1}$ делится на сумму $x+a$:

$$x^{2k+1}+a^{2k+1}=(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+a^2x^{2k-2}-\ldots+a^{2k}).$$

Если многочлен $f(x)$ имеет рациональный корень α, то он является приводимым над полем рациональных чисел, ибо $x-\alpha$ есть его нетривиальный делитель.

Если многочлен не имеет корней в поле рациональных чисел, то это не означает, что он неприводим (над этим полем). Так, например, многочлен $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$ является приводимым, но он не имеет рациональных корней, так как ни один из двух его множителей не обращается в нуль.

Теорема. *Если многочлен $f(x)$ имеет k различных корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то он делится на произведение*

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k).$$

Доказательство. По предыдущему имеем

$$f(x)=(x-x_1)\varphi(x).$$

По предположению x_2 есть корень $f(x)$, поэтому

$$f(x_2)=(x_2-x_1)\varphi(x_2)=0.$$

Сомножитель x_2-x_1 отличен от 0, ибо $x_2\neq x_1$, следовательно, $\varphi(x_2)=0$, т. е. x_2 есть корень многочлена $\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ делится на $x-x_2$:

$$\varphi(x)=(x-x_2)\varphi_1(x),$$

откуда находим:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\varphi_1(x).$$

Точно так же покажем, что число x_3 должно быть корнем многочлена $\varphi_1(x)$, откуда $\varphi_1(x)=(x-x_3)\varphi_2(x)$ и

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\varphi_2(x).$$

Продолжая эти рассуждения получим окончательно:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\Phi(x), \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ есть многочлен степени $n-k$ (n — степень $f(x)$), ч. т. д.

В частности, если известны n различных корней многочлена n-й степени ($n=k$), то множитель $\Phi(x)$ должен быть числом, так как произведение скобок в правой части (1) имеет одинакозую степень с $f(x)$. Приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях, получим $\Phi(x)=a_n$, откуда:

$$f(x)\equiv a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \qquad (2)$$

Примеры: 1) Числа 1 и 2 суть решения уравнения

$$x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0,$$

поэтому многочлен $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ делится на произведение $(x-1)(x-2)$. Деление можно выполнить последовательно по схеме деления на двучлен. Делим на $x-1$:

1	1	−3	3	−3	2
	1	−2	1	−2	0

Делим частное x^3-2x^2+x-2 на $x-2$:

2	1	−2	1	−2	
	1	0	1	0	

Второе частное есть x^2+1.
Имеем окончательно

$$x^4-3x^3+3x^2-3x+2=(x-1)(x-2)(x^2+1).$$

2) Многочлен x^3-2x^2-x+2 обращается в нуль при $x=1$, при $x=-1$ и при $x=2$, а потому имеет место тождество:

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2).$$

Теорема. *Многочлен степени n может иметь в поле рациональных чисел не более n корней.*

Доказательство. Тождество (2) показывает, что $f(x)$ ни при каком значении x, отличном от $x_1, x_2, \ldots x_n$, не может обратиться в 0, ибо не обращается в 0 ни один из сомножителей в правой части. Поэтому не может существовать $n+1$-го корня, отличного от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ч. т. д.

Число корней многочлена в поле рациональных чисел может быть различным. Так, неприводимый многочлен не имеет рациональных корней. Примером может служить неприводимый многочлен x^2+1.

Многочлен 3-й степени $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ в поле рациональных чисел имеет один корень $x=1$, так как ни при каком значении x второй множитель не обращается в 0. Многочлен x^3-2x^2-x+2 (см. выше пример 2) имеет три корня 1, −1 и 2, и никаких других корней он иметь не может.

Теорема. *Если два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$ степени не выше n имеют одинаковые значения при $n+1$ различных значениях x, то они тождественны: $f(x)\equiv\varphi(x)$.*

Доказательство. Если разность $f(x)-\varphi(x)$ не есть нульмногочлен, то она имеет степень не выше n и обращается в 0 при $n+1$ различных значениях n, что невозможно, поэтому $f(x)\equiv\varphi(x)$, ч. т. д.

Доказанная теорема и теорема о тождественности двух многочленов (§ 10) связаны между собой следующим образом. Тождественность двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ степени не выше n вытекает из совпадения их значений при $n+1$ различных значениях аргумента.

Таким образом, для равенства соответственных коэффициентов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ оказываются достаточным выполнения равенства

$$f(x)=\varphi(x)$$

лишь при $n+1$ различных значениях x.

Следствие. Если известно, что многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одинаковые значения при бесконечном множестве значений x (не обязательно при всех рациональных x), то они тождественны.

Примеры. 1) Найдем многочлен 1-й степени $y=kx+b$, если известны его значения y_1 и y_2, соответственно при $x=x_1$ и $x=x_2$.

Решение. По условию имеем:

$$y_1=kx_1+b \quad \text{и} \quad y_2=kx_2+b,$$

откуда:

$$y_1-y_2=k(x_1-x_2), \quad k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

и

$$b=y_1-kx_1=y_1-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x_1=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

есть искомый многочлен.

2) Найти многочлен второй степени

$$y=Ax^2+Bx+C,$$

если известны его значения $y_1=1$, $y_2=3$, $y_3=3$ соответственно при $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$. Написав условия задачи:

$$\begin{aligned} 1&=A+B+C && \text{(при } x=1\text{)}\\ 3&=A-B+C && \text{(при } x=-1\text{)}\\ 3&=4A+2B+C && \text{(при } x=2\text{),}\end{aligned}$$

из полученных уравнений найдем $A=1$, $B=-1$, $C=1$. Следовательно, $y=x^2-x+1$.

Если известны значения многочлена n-й степени при $n+1$ различных значениях x, то этих данных достаточно для определения коэффициентов $f(x)$.

Легко построить в общем виде формулу для многочлена степени не выше n, если известны $n+1$ его значений $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ соответственно при x, равном $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f(x)=y_1&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})}+\\ &+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})}+\ldots+\\ &+y_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n+1})}+\\ &+y_{n+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)}, \end{aligned}$$

являющееся многочленом, вообще говоря, n-й степени (в частных случаях степень может оказаться ниже n). Если положить $x=x_k$, то дробь, являющаяся множителем при y_k, обратится в 1, а все прочие дроби обратятся в 0. Поэтому $f(x_k)=y_k$ и многочлен $f(x)$ удовлетворяет поставленному условию. Выведенная формула называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Пример. Применим формулу Лагранжа к решению предыдущего примера:

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$
$$+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}+$$
$$+3\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+3\frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}=$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2-x-2)+\frac{1}{2}(x^2-3x+2)+(x^2-1)=x^2-x+1.$$

§ 16. Нахождение целых корней многочлена

Теорема. *Всякий целочисленный корень многочлена с целыми коэффициентами есть делитель свободного члена.*

Доказательство. Пусть коэффициенты многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

и корень α суть целые числа.

Имеем:

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_0=0.$$

Откуда

$$a_0=-a_n\alpha^n-a_{n-1}\alpha^{n-1}-\ldots-a_1\alpha=$$
$$=\alpha(-a_n\alpha^{n-1}-a_{n-1}\alpha^{n-2}-\ldots-a_1).$$

Следовательно, a_0 делится на α, так как выражение в скобках есть целое число, ч. т. д.

Таким образом, при отыскании целых корней многочлена с целыми коэффициентами достаточно подвергнуть испытанию лишь делители свободного члена. Если свободный член имеет большое количество делителей, то следующий признак дает возможность сократить число испытаний.

Если α корень многочлена, то

$$f(x)=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0),$$

где b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0 (как показывает схема деления на двучлен) суть целые числа. Положим $x=k$, где k — любое целое число, получим:

$$f(k)=(k-\alpha)N, \qquad (1)$$

где $N=b_{n-1}k^{n-1}+b_{n-2}k^{n-2}+\ldots+b_0$ — целое число

Положим в равенстве (1) $k=\pm 1$, тогда получим:

$$f(1)=(1-\alpha)N_1;\quad f(-1)=(1+\alpha)N_2.$$

Поэтому, испытанию подлежат лишь те делители свободного члена, для которых каждое из отношений $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ и $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ является целым числом.

Примеры: 1) Найти целые корни уравнения

$$x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0.$$

Решение. Выписываем делители числа -6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Подставляя $x=\pm 1$, получим $f(1)=-12$ и $f(-1)=-6$, следовательно, ± 1 не являются корнями. Составим отношения $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ и $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$; при $\alpha=2$ получим целые числа, поэтому число 2 подлежит испытанию. Аналогично убедимся, что испытанию подлежат числа -2 и -3. Числа же 3 и 6 испытанию не подлежат. Так, при $\alpha=3$ отношение $\frac{f(-1)}{\alpha+1}=-\frac{6}{4}$ является дробным. Деля данный многочлен на $x-2$

2	1	2	-4	-5	-6
	1	4	4	3	0

получим в частном x^3+4x^2+4x+3 и 0 в остатке. Следовательно, 2 есть корень. Число -2 не может быть корнем, ибо свободный член частного 3 не делится на -2. Делим частное на $x+3$

-3	1	4	4	3
	1	1	1	0

получаем второе частное x^2+x+1 и 0 в остатке, следовательно, -3 есть корень. Больше целых корней нет. Имеем тождество:

$$x^4+2x^3-4x^2-5x-6=(x-2)(x+3)(x^2+x+1).$$

2) Доказать, что если многочлен $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ с целыми коэффициентами при $x=0$ и при $x=1$ имеет нечетные значения, то он не имеет целых корней.

Решение. Пусть, вопреки утверждению, α — целый корень: $f(\alpha)=0$. Отношение $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ при нечетном $f(1)$ может быть целым числом, если α — четное число. Из условия

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_0=0$$

находим $a_0=-\alpha(a_1+a_2\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}a_n)$, следовательно, a_0 есть четное число. Но, с другой стороны, $f(0)=a_0$, а потому не может быть четным числом. Это противоречие доказывает теорему.

Если коэффициенты многочлена $f(x)$ не являются целыми числами, то, умножая $f(x)$ на общее кратное d знаменателей его коэффициентов получим многочлен $df(x)$ с целыми коэффициентами, имеющий те же корни, что и $f(x)$. Для нахождения целых корней $f(x)$ достаточно найти целые корни $df(x)$.

Пример. Найти целые корни многочлена

$$x^3-\frac{11}{6}x^2+x-\frac{1}{6}.$$

Решение. Умножая $f(x)$ на 6, получим многочлен

$$6x^3-11x^2+6x-1.$$

Испытанием делителей свободного члена ± 1 находим целый корень $x=1$.

§ 17. Нахождение рациональных корней многочлена

Теорема. *Всякий рациональный корень многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равным единице, есть целое число.*

Доказательство методом от противного. Предположим, что многочлен

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

где $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — целые числа, имеет дробный корень $x=\frac{p}{q}$, где p и q взаимно простые числа и $q\neq 1$. Тогда имеем:

$$\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0.$$

Умножая на q^{n-1}, получим:

$$\frac{p^n}{q}=-a_{n-1}p^{n-1}-\ldots-a_1pq^{n-2}-a_0q^{n-1}.$$

Последнее равенство невозможно, так как в правой части находится целое число, а в левой несократимая дробь $\frac{p^n}{q}$ (числа p и q взаимно просты), это противоречие доказывает справедливость теоремы.

Следствие. *Если многочлен с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равном* 1, *не имеет целых корней, то он не имеет и дробных корней.*

Пусть требуется найти рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Умножив $f(x)$ на a_n^{n-1}, получим многочлен, имеющий те же корни:

$$a_n^{n-1}f(x)=a_n^nx^n+a_{n-1}a_n^{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1a_n^{n-1}x+a_0a_n^{n-1}.$$

Заменив аргумент x аргументом $y=a_nx$, представим данный многочлен в виде:

$$a_n^{n-1}f(x)=\varphi(y)=y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_1a_n^{n-2}y+a_0a_n^{n-1}.$$

Все рациональные корни последнего многочлена суть целые числа. Отыскав все целые корни этого многочлена, из соотношения $x=\frac{y}{a_n}$ найдем все рациональные корни многочлена $f(x)$.

Пример. Найти рациональные корни многочлена

$$4x^3-7x^2-x+3=f(x).$$

Решение. Ищем целые корни многочлена

$$16f(x)=(4x)^3-7(4x)^2-4(4x)+3\cdot 4^2=$$
$$=y^3-7y^2-4y+48=\varphi(y), \qquad \text{где } y=4x.$$

Исследуем делители числа 48: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 16, ± 24, ± 48.

При $\alpha=2$ отношение $\frac{\varphi(-1)}{\alpha+1}=\frac{44}{3}$ дробное, при $\alpha=-2$ отношение $\frac{\varphi(1)}{\alpha-1}=\frac{38}{3}$ дробное, поэтому делители ± 2 отбрасываем. При $\alpha=3$ оба отношения $\frac{\varphi(1)}{\alpha-1}=\frac{38}{2}$ и $\frac{\varphi(-1)}{\alpha+1}=\frac{44}{4}$ целые. Разделив $\varphi(y)$ на $y-3$:

	1	−7	−4	48
3				
	1	−4	−16	0

получим $\varphi(y)=(y-3)(y^2-4y-16)$.

Квадратный трехчлен в скобках не имеет целых корней, поэтому единственным рациональным корнем является $x=\frac{y}{4}=\frac{3}{4}$.

§ 18. Наибольший общий делитель двух многочленов

Определение. *Многочлен* $d(x)=d_kx^k+\ldots+d_0$ *называется общим делителем многочленов*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

и

$$\varphi(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0,$$

если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *делятся на* $d(x)$:

$$f(x)=f_1(x)\,d(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\varphi_1(x)\,d(x).$$

Любое число $c\neq 0$ является общим делителем произвольных двух многочленов, так как c является делителем всякого многочлена.

Определение I. *Два многочлена* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются взаимно простыми, если они, кроме числовых, не имеют никаких других общих делителей.*

Определение II. *Наибольшим общим делителем двух многочленов* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называется такой их общий делитель, который делится на всякий другой общий делитель.*

Из всех общих делителей многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ наибольший общий делитель имеет наибольшую степень. Наибольший общий делитель может быть определен с точностью до числового множителя, отличного от нуля. Это значит, что если $d(x)$ есть наибольший общий делитель данных многочленов, то и $cd(x)$ (где $c\neq 0$) также есть их наибольший общий делитель.

Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно простые, то их наибольший общий делитель есть отличное от нуля число. Без ущерба для общности можем считать его равным 1. Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ будем обозначать символом $D(f, \varphi)$.

Алгоритм Эвклида, служащий для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, без существенных изменений распространяется на многочлены. Положим для определенности, что степень $\varphi(x)$ не превосходит степени $f(x)$, т. е. $m \leqslant n$. Если $f(x)$ делится без остатка на $\varphi(x)$, то $D(f, \varphi) = \varphi(x)$. В противном случае получится некоторый остаток $r_1(x)$, неравный тождественно нулю. Далее делим $\varphi(x)$ на $r_1(x)$ и, если получится остаток $r_2(x)$, неравный тождественно нулю, то делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$ и т. д. Процесс деления предыдущего остатка на последующий не может продолжаться бесконечно и должен закончиться. В самом деле, степени остатков по мере продолжения процесса убывают, но, будучи целыми неотрицательными числами, они не могут убывать неограниченно. Обозначая через $q_0(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_\rho(x)$ последовательные частные, получим:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\, q_0(x) + r_1(x) \\ \varphi(x) &\equiv r_1(x)\, q_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= r_2(x)\, q_2(x) + r_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{\rho-2}(x) &\equiv r_{\rho-1}(x)\, q_{\rho-1}(x) + r_\rho(x) \\ r_{\rho-1}(x) &\equiv r_\rho(x)\, q_\rho(x) \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Теорема. *Последний неравный тождественно нулю остаток $r_\rho(x)$ есть наибольший общий делитель данных многочленов:*

$$r_\rho(x) = D(f, \varphi).$$

Доказательство. 1° Последний остаток $r_\rho(x)$ является делителем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. В самом деле, из предпоследней строчки соотношений (I) следует, что $r_\rho(x)$ является делителем $r_{\rho-2}$, ибо остаток $r_{\rho-2}$ представлен в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на r_ρ. На основании тех же соображений заключаем, что каждый из остатков $r_{\rho-3}, \ldots, r_2, r_1$, а также $f(x)$ и $\varphi(x)$ делятся на $r_\rho(x)$.

2° Всякий общий делитель $r_\rho(x)$ многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ является делителем остатка r_ρ. В самом деле, переписав тождества (I) в виде:

$$\left.\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - \varphi(x)\, q_0(x) \\ r_2(x) &= \varphi(x) - r_1(x)\, q_1(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_\rho(x) &= r_{\rho-2}(x) - r_{\rho-1}(x)\, q_{\rho-1}(x) \end{aligned}\right\} \qquad (I')$$

замечаем, что каждый общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ является делителем $r_1(x)$, а будучи делителем $r_1(x)$, он является делителем $r_2(x)$, а также и $r_3(x)$ и т. д., и, наконец, $r_\rho(x)$.

Сопоставляя доказанное, видим, что $r_\rho(x)$, будучи общим делителем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, делится на всякий другой их общий делитель, т. е. $D(f, \varphi) = r_\rho(x)$, ч. т. д.

Если последний, отличный от нуля остаток $r_\rho(x)$ является числом, то многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты.

Теорема. *Для всяких двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, удовлетворяющие тождеству*

$$D(f, \varphi) \equiv P(x) f(x) + Q(x) \varphi(x). \qquad (1)$$

Доказательство. Подставив $r_1(x)$ из первого тождества (I') во второе, получим:

$$r_2(x) = \varphi(x) - [f(x) - \varphi(x) q_0(x)] q_1(x) = \\ = P_1(x) f(x) + Q_1(x) \varphi(x),$$

где $P_1(x) = -q_1(x)$ и $Q_1(x) = 1 + q_0(x) q_1(x)$.

Подставив в третье тождество вместо $r_2(x)$ найденное выражение, получим аналогичное тождество для $r_3(x)$. Процесс последовательной подстановки приведет к соответствующему тождеству (1) для $r_\rho = D(f, \varphi)$, ч. т. д.

Следствие. Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, то $D(f, \varphi)$ есть число: $D(f, \varphi) = c \neq 0$. Разделив обе части тождества (1) на c, можно без ущерба для общности считать $D(f, \varphi)$ равным 1. В этом случае тождество (1) перепишется так:

$$P(x) f(x) + Q(x) \varphi(x) \equiv 1.$$

Пример.

1. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.$$

Решение. Во избежание дробей умножаем $f(x)$ предварительно на 2, а затем делим на $\varphi(x)$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6 & 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\ \hline 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x & \hline x + 1 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 5x - 6 & \\ 2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 & \text{(умножаем на 2).} \\ \hline 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & \\ \hline r_1(x) \equiv -3x^2 + 14x - 15 & \end{array}$$

В процессе вычисления мы умножаем первую разность на 2. От этого частное искажается, но остаток r_1 приобретает лишь числовой множитель 2, что не существенно. Умножив $\varphi(x)$ на 3, делим на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 15x^2 - 12x + 9 & -3x^2 + 14x - 15 \\ \hline 6x^3 - 28x^2 + 30x & \hline -2x - 13 \\ \hline 13x^2 - 42x + 9 & \\ 39x^2 - 126x + 27 & \text{(умножаем на 3).} \\ \hline 39x^2 - 182x + 195 & \\ \hline r_2(x) = 56x - 168 & \end{array}$$

Можно положить $r_2(x) = x - 3$.
Делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -3x^2+14x-15 & x-3 \\ \hline -3x^2+9x & -3x+5 \\ \hline 5x-15 & \\ 5x-15 & \\ \hline r_3=0 & \end{array}$$

Следовательно, $D(f, \varphi) = x - 3$.

§ 19. Разложение многочлена на неприводимые множители

Теорема. *Если произведение $F(x)\Phi(x)$ делится на многочлен $f(x)$ и многочлены $F(x)$ и $f(x)$ взаимно просты, то $\Phi(x)$ делится на $f(x)$.*

Доказательство. Многочлены $F(x)$ и $f(x)$ взаимно простые, а потому имеем:

$$F(x)P(x) + f(x)Q(x) \equiv 1.$$

Умножая почленно на $\Phi(x)$, получим:

$$[F(x)\Phi(x)]P(x) + Q(x)\Phi(x)f(x) \equiv \Phi(x).$$

Так как каждое слагаемое в левой части делится на $f(x)$, то и $\Phi(x)$ делится на $f(x)$, ч. т. д.

Теорема. *Если $p(x)$ неприводимый многочлен, а $f(x)$ произвольный многочлен, то либо $f(x)$ и $p(x)$ взаимно просты, либо $f(x)$ делится на $p(x)$.*

Доказательство. Имеем:

$$f(x) = f_1(x)D(f, p), \quad p(x) = p_1(x)D(f, p),$$

где $D(f, p)$ — общий наибольший делитель $f(x)$ и $p(x)$. Так как $p(x)$ неприводимый многочлен, то либо $p_1(x)$ — число, либо $D(f, p)$ — число. В первом случае можно считать $D(f, p) = p(x)$, и тогда $f(x)$ делится на $p(x)$. Во втором случае $f(x)$ и $p(x)$ взаимно просты, ч. т. д.

Следствие. *Два неприводимые многочлена либо взаимно просты, либо совпадают с точностью до числового множителя* (т. е. могут отличаться лишь числовым множителем). В самом деле, если неприводимый многочлен $q(x)$ делится на неприводимый многочлен $p(x)$, то $q(x) = q_1(x)p(x)$, но, в силу неприводимости $q(x)$, это возможно лишь при условии $q_1(x) = \text{const}$.

Теорема. *Если произведение $f_1(x)\,f_2(x)\,\ldots\,f_n(x)$ делится на неприводимый многочлен $p(x)$, то по крайней мере один из сомножителей делится на $p(x)$.*

Доказательство методом полной индукции. Пусть произведение двух сомножителей $f_1(x)f_2(x)$ делится на $p(x)$. По предыдущей теореме либо $f_1(x)$ делится на $p(x)$, либо $f_1(x)$ и $p(x)$ взаимно просты. В последнем случае $f_2(x)$ делится на $p(x)$. Итак, теорема доказана для произведения двух сомножителей. Предположим, что теорема верна для произведения $n-1$ сомножителей, покажем, что

в этом предположении она будет верна для произведения n сомножителей. Отсюда и будет следовать справедливость теоремы для любого n. Произведение

$$f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)$$

можно представить в виде произведения двух сомножителей

$$\{f_1(x) f_2(x) \dots f_{n-1}(x)\} f_n(x).$$

Если $f_n(x)$ делится на $p(x)$, то теорема верна, если $f_n(x)$ не делится на $p(x)$, то другой сомножитель делится на $p(x)$. Но этот сомножитель есть произведение $n-1$ многочленов, и, следовательно, по крайней мере один из них должен делиться на $p(x)$, ч. т. д.

Теорема. *Всякий многочлен $f(x)$, не являющийся числом, может быть представлен в виде произведения неприводимых множителей:*

$$f(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_k(x); \qquad (1)$$

неприводимые многочлены $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ (из которых ни один не является числом) определяются единственным образом с точностью до числовых множителей и порядка следования.

Доказательство. Для неприводимого многочлена $p(x)$ формула (1) справедлива, так как имеет место „тривиальное разложение“ $p(x) = p(x)$. Докажем теорему методом полной индукции. Многочлены первой степени $ax + b$ неприводимы, а потому для них формула (1) справедлива. Предположим, что теорема справедлива для многочленов степени более низкой, чем n, и докажем, что в этом предположении она справедлива для многочленов n-й степени. В самом деле, если многочлен $f(x)$ неприводим, то для него формула (1) справедлива. Если $f(x)$ приводим, то его можно представить в виде произведения двух нетривиальных делителей:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

степень каждого из которых ниже n. По предположению каждый из многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ может быть представлен в виде произведения неприводимых множителей:

$$f_1(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_l(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = p_{l+1}(x) \dots p_k(x),$$

откуда:

$$f(x) \equiv p_1(x) p_2(x) \dots p_l(x) p_{l+1}(x) \dots p_k(x). \qquad (1)$$

Докажем единственность разложения (1). Допустим, что многочлен $f(x)$ двумя способами разложен на неприводимые множители:

$$f(x) \equiv p_1(x) p_2(x) \dots p_k(x) \equiv q_1(x) q_2(x) \dots q_l(x).$$

Произведение $q_1(x) q_2(x) \dots q_l(x)$ делится на неприводимый многочлен $p_1(x)$, а потому по крайней мере один из сомножителей делится на $p_1(x)$. Переменив в случае надобности порядок сомножителей, без ущерба для общности можно считать, что $q_1(x)$ делится

на $p_1(x)$. Это возможно, если $q_1(x)$ с точностью до числового множителя совпадает с $p_1(x)$, т. е. $p_1(x) \equiv c_1 q_1(x)$.

Сокращая на $p_1(x)$, получим тождество:

$$p_2(x) \ldots p_k(x) = c_1 q_2(x) \ldots q_l(x).$$

Повторяя те же рассуждения последовательно относительно сомножителей $p_2(x), \ldots, p_k(x)$, обнаружим, что каждому из них соответствует тождественный ему (с точностью до числового множителя) сомножитель в правой части. Те же рассуждения можно применить к сомножителям $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_l(x)$ и установить, что каждому из них соответствует тождественный (с точностью до числового множителя) многочлен в левой части, ч. т. д.

Пример. Многочлен $x^2 - 8x + 15$ может быть разложен на неприводимые множители следующим образом:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5). \tag{2}$$

Этот же многочлен может быть разложен на множители, например, так

$$x^2 - 8x + 15 = (3x - 9)\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right). \tag{3}$$

Разложения (2) и (3) не рассматриваются как различные, так как в них неприводимые многочлены отличаются лишь числовыми множителями.

В формуле (1) среди сомножителей $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ могут встречаться одинаковые (с точностью до числового множителя) многочлены. Объединяя вместе одинаковые сомножители, получим каноническое разложение многочлена в следующем виде

$$f(x) \equiv C p_1^{\alpha_1}(x) p_2^{\alpha_2}(x) \ldots p_s^{\alpha_s}(x),$$

где C — числовой множитель, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — некоторые натуральные числа.

Пример. Разложить на неприводимые множители многочлен

$$x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8.$$

Решение. Испытанием делителей свободного члена $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ убеждаемся, что $f(x)$ имеет корень $x = -2$. Разделив на $x + 2$ получим:

$$f(x) = (x + 2)(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4).$$

Второй множитель имеет корень $x = -2$; разделив на $x + 2$, получим:

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

В последнем тождестве второй множитель имеет корень $x = -2$. Имеем:

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1).$$

Следовательно, имеем окончательно:

$$x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (x + 2)(x + 2)(x + 2)(x^2 + 1) = (x + 2)^3 (x^2 + 1).$$

Здесь неприводимый множитель $x + 2$ встречается 3 раза.

Нетрудно заметить полный параллелизм теории делимости целых чисел и теории делимости многочленов. Как в той, так и в другой теориях общими являются следующие понятия и предложения.

1° *Понятия делимости, общего делителя, взаимно простых элементов (числа или многочлены), неразложимого элемента (простое число и неприводимый многочлен).*

2° *Деление с остатком.*

3° *Алгоритм Эвклида.*

4° *Алгоритм Эвклида есть конечный процесс, всегда заканчивающийся на некотором шаге* *.

Из этих предложений вытекают следствия:

5° *Для двух взаимно простых элементов (чисел или многочленов) p и q имеет место тождество:*

$$xp + yq \equiv 1.$$

6° *Из 5° вытекает теорема: если один из сомножителей произведения rs взаимно прост с делителем q и произведение делится на q, то другой сомножитель делится на q* **.

7° *Всякий элемент может быть представлен в виде произведения неразложимых элементов. На основании теоремы 6° доказывается единственность этого разложения.*

Общий наибольший делитель двух многочленов, разложенных на множители, можно находить, как в арифметике, перемножая общие множители обоих многочленов. При этом каждый множитель берется в наименьшей из степеней, с которой он входит в данные многочлены.

Пример. Пусть

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3(x^2+1),$$
$$\varphi(x) = (x+2)^2(x^2+1)(x-1),$$

тогда:

$$D(f, \varphi) = (x+2)^2(x^2+1).$$

§ 20. Многочлены с несколькими аргументами

Многочлен с аргументами $x, y, z, \ldots, w$ может быть представлен в форме суммы одночленов вида:

$$ax^n y^m z^k \ldots w^l, \tag{1}$$

где a — коэффициент и $n, m, k, \ldots, l$ — некоторые целые неотрицательные числа (если какой-либо аргумент, например w, не входит в данный член, то условимся считать соответствующий показатель равным нулю, $l = 0$). Не исключена возможность, что многочлен

* Примером, когда алгоритм Эвклида не заканчивается, а может быть продолжаем неограниченно, служит известный из элементарной геометрии процесс нахождения общей меры двух несоизмеримых отрезков.

** Пусть, например, r и q взаимно просты, тогда $xr + yq = 1$, откуда $xrs + yqs = s$. Так как xrs и yqs делятся на q, то и s делится на q.

содержит лишь один член вида (1) и обращается в этом случае в одночлен. Если коэффициенты всех членов равны нулю, то такой многочлен называется нуль-многочленом.

Определение. *Сумма показателей степеней:*

$$m+n+\ldots+l$$

(где $a\neq 0$) называется степенью члена (1). *Наибольшая из степеней членов, входящих в состав многочлена, отличного от нуль-многочлена, называется степенью многочлена.*

Примеры:

1. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$

есть многочлен 2-й степени с двумя аргументами.

2. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2+Gx+Hy+Kz+L$

есть многочлен 2-й степени с 3-мя аргументами.

3. $1-xyz$ есть многочлен 3-й степени с тремя аргументами.

Теорема. *Если при всех значениях аргументов значение многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно нулю, то все его коэффициенты равны нулю.*

Доказательство методом полной индукции. Предположим, что теорема справедлива для многочленов с числом аргументов меньшим n, докажем, что в этом предположении теорема будет справедлива для многочленов с n аргументами. Расположим многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по степеням одного из аргументов, например, x_1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=p_n(x_2, x_3, \ldots, x_n)\,x_1^n+p_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)\,x_1^{n-1}+ \\ +\ldots+p_0(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Коэффициенты $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$ суть некоторые многочлены с $n-1$ аргументами $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ при всех значениях аргументов. Фиксируем произвольно значения аргументоз $x_2, x_3, \ldots, x_n$, тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как многочлен с одним аргументом x_1. Этот многочлен равен нулю при всех значениях x_1, а потому все его коэффициенты равны нулю:

$$p_n(x_2, x_3, \ldots, x_n)=p_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n)=\ldots= \\ =p_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)=0. \qquad (2)$$

Так как значения аргументов $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно выбирать произвольно, то равенства (2) суть тождества. По предположению это возможно, если все коэффициенты многочленов $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$, а значит, все коэффициенты многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны нулю. Итак, теорема верна для многочленов с n аргументами в предположении, что она верна для многочлена с меньшим числом аргументов. Но (см. § 10) теорема верна для многочленов с одним аргументом, а потому она верна для многочленов с любым числом аргументов, ч. т. д.

Теорема о тождественности многочленов: *необходимым и достаточным условием тождественности двух многочленов*

является равенство соответственных коэффициентов (т. е. коэффициентов членов, содержащих одни и те же аргументы в одинаковых степенях).

Доказательство, данное в § 10 для многочленов с одним аргументом, остается в силе.

Пример. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется симметрическим, если он остается неизменным при любой перестановке его аргументов. Найдем общий вид симметрических многочленов 2-й степени с 3-мя аргументами.

Решение. Пусть

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Lx + My + Nz + P.$$

Переставим аргументы, заменив x на y, y на z и z на x, получим:

$$f(y, z, x) = Ay^2 + Bz^2 + Cx^2 + Dyz + Eyx + Fxz + Ly + Mz + Nx + P.$$

По условию в результате перестановки должен получиться многочлен, тождественный данному. Приравнивая соответственные коэффициенты, получим:

$$A = C \text{ (при } x^2\text{)}, \; B = A \text{ (при } y^2\text{)}, \; C = B,$$
$$D = E, \; E = F, \; F = D, \; L = N, \; M = L, \; N = M.$$

Следовательно, $A = B = C$, $D = E = F$ и $L = M = N$,

откуда:

$$f(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2) + D(xy + yz + xz) + L(x + y + z) + P.$$

Как легко видеть, последний многочлен не меняется при любой перестановке аргументов. Это и есть общий вид симметрического многочлена второй степени с 3-мя аргументами.

Над многочленами с любым числом аргументов можно производить действия сложения, вычитания и умножения по общим правилам действий над многочленными выражениями. В результате выполнения этих действий также получаются многочлены. Для сложения и умножения выполняются основные законы действий, поэтому множество многочленов с рациональными коэффициентами является кольцом. Понятия делимости и неприводимого многочлена распространяются на многочлены с любым числом аргументов. Для нахождения общего наибольшего делителя применим, с некоторыми изменениями, алгоритм Эвклида *.

Наконец, теорема о разложении многочлена на неприводимые множители и о единственности этого разложения остается в силе для многочленов с многими аргументами.

Определение. *Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородным степени n, если все его члены имеют одну и ту же степень n.*

Примеры. 1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ есть однородный многочлен 2-й степени с двумя аргументами.

2) $2xyz^2 - x^4 - y^4 + x^2z^2$ есть однородный многочлен 4-й степени с 3-мя аргументами.

---

* Подробнее об этом см. в курсах высшей алгебры, например, М. Бохер, Введение в высшую алгебру, или Д. Граве, Элементы высшей алгебры.

Свойство однородных многочленов. *При замене аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ однородного многочлена степени k на $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ многочлен приобретает множитель t^k:*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Возьмем отдельный член многочлена:

$$ax_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

при замене $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ получим:

$$a(tx_1)^{m_1}(tx_2)^{m_2} \ldots (tx_n)^{m_n} = t^k ax_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

ибо $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$. Итак, каждый член приобретает множитель t^k, следовательно, в силу однородности, t^k будет общим множителем всех членов, ч. т. д.

Всякий многочлен после надлежащей перегруппировки его членов может быть представлен в виде суммы однородных многочленов.

Примеры. 1. Пусть $f(x, y, z) = axy + byz + cxz$, имеем

$$f(tx, ty, tz) = t^2(axy + byz + cxz).$$

2. $ax^3 + bxy + cxyz + dy^2 + ex + gy + k =$
$= (ax^3 + cxyz) + (bxy + dy^2) + (ex + gy) + k.$

§ 21. Частные приемы разложения многочленов на множители

Задача разложения многочлена на множители считается решенной, если данный многочлен представлен в виде произведения неприводимых многочленов, каждый из которых может входить в окончательное выражение в некоторой степени. Существует общий метод Кронекера, позволяющий путем ряда испытаний установить, является данный многочлен приводимым (над полем рациональных чисел) или нет, и выполнить разложение приводимого многочлена на множители. Однако практическое значение метода Кронекера ничтожно, так как пользование им связано с исключительно громоздкими вычислениями. В высшей алгебре устанавливается ряд признаков неразложимости многочленов (критерии неприводимости), однако эти признаки далеко выходят за рамки элементарной алгебры.

Имеется и ряд весьма частных элементарных признаков, не имеющих, однако, сколько-нибудь существенного практического значения. Из сказанного понятно, что в практике разложения многочленов на множители первостепенную важность получает умение рационально применять отдельные частные приемы в их разнообразных комбинациях. Это умение приобретается лишь в результате длительного опыта.

Простейшие методы разложения основываются на непосредственном применении законов действий. Непосредственное применение закона дистрибутивности получило в учебной литературе название метода вынесения общего множителя за скобки.

Примеры: 1) Разложить на множители

$$(2a^2-3ax)(5c+2d)-(6a^2-4ax)(5c+2d)=$$
$$=[(2a^2-3ax)-(6a^2-4ax)](5c+2d) \text{ (дистрибутивность)}$$
$$=(ax-4a^2)(5c+2d)=a(x-4a)(5c+2d) \text{ (дистрибутивность).}$$

2. Обычно применению закона дистрибутивности предшествуют преобразования, основанные на законах коммутативности (перестановка членов) и ассоциативности (группировка членов), этот прием в учебной литературе называется методом группировки. Нередко оказывается целесообразным применение „искусственных" преобразований, заключающихся в разбиении некоторых слагаемых на сумму двух (или нескольких) слагаемых или в введении сокращающихся членов.

Примеры:

2) $(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)=a^3y^3+3a^2by^2x+3ab^2yx^2+$
$+b^3x^3+a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3-a^3x^3-a^3y^3-b^3x^3-b^3y^3$

(раскрытие скобок и ассоциативность)

$$=3a^2by^2x+3ab^2yx^2+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2=$$
$$=3abxy(ay+bx+ax+by) \text{ (дистрибутивность)}$$
$$=3abxy[(ay+ax)+(bx+by)] \text{ (коммутативность и ассоциативность)}$$
$$=3abxy[a(x+y)+b(x+y)] \text{ (дистрибутивность)}$$
$$=3abxy(x+y)(a+b) \text{ (дистрибутивность).}$$

3) $x^3+6x^2+11x+6$. Разобьем предварительно второй и третий члены каждый на сумму двух слагаемых:

$$6x^2=3x^2+3x^2 \text{ и } 11x=9x+2x.$$

Получим $x^3+6x^2+11x+6=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6=$
$$=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)=(x+3)(x^2+3x+2)=$$
$$=(x+3)(x^2+x+2x+2)=(x+3)[x(x+1)+2(x+1)]=(x+3)(x+1)(x+2)$$

4) Разложить на множители

$$P=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b).$$

Решение. Замечаем, что выражение в третьей скобке есть разность выражений в первых двух:

$$a+b=(b+c)-(c-a);$$

имеем:

$$P=bc(b+c)+ca(c-a)-ab[(b+c)-(c-a)]=$$
$$=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(b+c)+ab(c-a)=$$
$$=(b+c)(bc-ab)+(c-a)(ca+ab)=$$
$$=b(b+c)(c-a)+a(c-a)(b+c)=(c-a)(a+b)(b+c).$$

3. Наиболее часто встречающиеся произведения обычно выписываются в виде готовых формул, и ими пользуются в процессе вычислений. Таковы, например, формулы сокращенного умножения:

$$(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2 \quad (x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)=x^3\pm a^3$$
$$(x\pm a)^3=x^3\pm 3x^2a+3xa^2\pm a^3 \quad (x+a)(x-a)=x^2-a^2.$$

К этим формулам полезно присоединить следующую формулу:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

позволяющую разложить на множители квадратный трехчлен, если коэффициент при x представлен в виде суммы, а свободный член в виде произведения двух чисел. Отметим часто встречающееся преобразование выделения полного квадрата, заключающееся в дополнении (путем введения сокращающихся членов) некоторой группы слагаемых до квадрата многочлена.

Примеры: 5) Разложить на множители $x^4+x^2y^2+y^4$.

Решение. Применим преобразование выделения полного квадрата:

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

Полученное разложение полезно запомнить.

6) Разложить на множители x^2+6x+8.

Решение. Как легко видеть, $6=2+4$ и $8=2\cdot4$, а потому:

$$x^2+6x+8=(x+2)(x+4).$$

Этот же пример можно решить выделением полного квадрата:

$$x^2+2\cdot3\cdot x+8=(x^2+2\cdot3\cdot x+9)+8-9=(x+3)^2-1=(x+4)(x+2).$$

7) Разложить на множители $(x+y)^4+x^4+y^4$.

Решение. Имеем

$$x^4+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$$
$$=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2,$$

откуда

$$(x+y)^4+x^4+y^4=2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2]=$$
$$=2[(x+y)^2-xy]^2=2(x^2+y^2+xy)^2.$$

8) Разложить на множители

$$S=a^6-b^6+(a^4+a^2b^2+b^4).$$

Решение. Имеем:

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\text{ и}$$
$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\text{ (см. пример 5),}$$

следовательно,

$$S=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)[(a+b)(a-b)+1]=$$
$$=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2+1-b^2).$$

Знание корней многочлена $f(x)$ позволяет или произвести полностью разложение на множители или выделить ряд множителей первой степени и свести задачу к разложению на множители многочлена более низкой степени. Этот способ был иллюстрирован выше большим числом примеров.

Примеры: 9) Разложить на множители

$$P = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3.$$

Решение. Рассмотрим P как многочлен относительно аргумента a, считая, что b и c имеют произвольные фиксированные значения. Легко заметить, что $P(a, b, c)$ обращается в нуль при $a=b$ и при $a=c$, следовательно, P делится на $(a-b)(a-c)$.

Коэффициент при a^2 делителя $(a-b)(a-c)$ равен 1, поэтому коэффициенты частного суть целые выражения относительно b и c. Аналогично, если рассматривать P как многочлен аргумента b, то заметим, что он обращается в нуль при $b=c$, это дает новый делитель $b-c$. Итак, $P(a, b, c)$ делится на $(a-b)(a-c)(b-c)$.

Многочлен $P(a, b, c)$ есть однородный многочлен 4-й степени, а делитель — однородный многочлен 3-й степени, следовательно, частное будет однородный многочлен 1-й степени вида

$$Aa + Bb + Cc,$$

где A, B и C — числовые коэффициенты:

$$P \equiv (a-b)(a-c)(b-c)(Aa + Bb + Cc)^*. \qquad (1)$$

Для нахождения чисел A, B и C можно поступить следующим образом: если раскрыть скобки в правой части, то получим многочлен, тождественный $P(a, b, c)$, по теореме о тождественности должны быть равны соответственные коэффициенты в обеих частях тождества (1). Легко видеть непосредственно, что коэффициентом при a^3b в правой части служит число A, а в левой — 1, и потому $A=-1$. Аналогично сравнивая коэффициенты при b^3a и c^3a, получим $B=-1$, $C=-1$. Следовательно,

$$P = -(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

10) Разложить на множители

$$\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Решение. Заметим, что $\Phi(x, y, z)$ обращается в нуль при $x=-y-z$, следовательно, $\Phi(x, y, z)$ делится на $x+y+z$. Делимое есть однородный симметрический многочлен 3-й степени, а делитель — однородный симметрический многочлен 1-й степени, а потому частное есть однородный симметрический многочлен 2-й степени (см. § 20, пример на стр. 60).

$$\Phi(x, y, z) = (x+y+z)[K(x^2+y^2+z^2) + L(xy+yz+xz)], \qquad (2)$$

сравнивая коэффициенты обеих частей при x^3, получим $K=1$.

Тождество (2) справедливо при всех значениях x, y и z; положим, например, в обеих частях $x=1$, $y=1$, $z=0$, тогда получим $2=2(2K+L)$, откуда $L=-1$. Итак, имеем тождество:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

§ 22. Поле рациональных функций

Простейшего вида дробным рациональным выражением является отношение двух многочленов.

---

* Частное не может быть степени выше 1 и не может содержать свободный член, так как в последнем случае в состав произведения P вошли бы члены третьей степени:

$$D(a-b)(a-c)(b-c).$$

Определение. *Отношение двух многочленов будем называть рациональной дробью. При этом многочлен-знаменатель отличен от нуль-многочлена.*

По количеству букв-аргументов, содержащихся в многочленах — числителе и знаменателе, рациональные дроби разделяются на дроби с одним, двумя, тремя и т. д. аргументами. Примерами рациональных дробей могут служить следующие алгебраические выражения:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{(с одним аргументом)},$$

$$\frac{x}{x-y} \quad \text{(с двумя аргументами)},$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{1-x-y-z} \quad \text{(с тремя аргументами)}.$$

Всякий многочлен $f(x, y \ldots)$ можно рассматривать как рациональную дробь $\frac{f(x,y,\ldots)}{1}$, если условиться считать знаменатель равным 1. Таким образом, множество многочленов входит как часть в множество всевозможных рациональных дробей.

Любой системе числовых значений аргументов, *при которой знаменатель рациональной дроби не обращается в нуль,* соответствует вполне определенное значение этой дроби, все такие системы образуют множество допустимых значений аргументов. В частности для дроби с одним аргументом $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ допустимо любое значение x, не являющееся корнем многочлена $\varphi(x)$.

Примеры:

1) Для дроби $\frac{1}{1+x^2}$ допустимым является произвольное значение x.

2) Для дроби $\frac{x}{x^2-1}$ допустимым является любое значение $x \neq \pm 1$.

3) Для дроби $\frac{x^2}{x}$ допустимым является любое значение $x \neq 0$.

4) Для дроби $\frac{x+1}{x^2-2}$ любое рациональное значение x является допустимым, ибо знаменатель мог бы обратиться в нуль при значениях x, удовлетворяющих условию $x^2 = 2$. Но, как известно, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

5) Для дроби $\frac{x+y}{x-y}$ допустимой является любая система неравных значений x и y (т. е. $x \neq y$).

6) Для дроби $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$ допустимой является любая система значений x, y и z, кроме $x = y = z = 0$.

Рассмотрим две дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, считая допустимым для x любое значение, при котором *обе данные дроби* имеют смысл. Таким образом, множество допустимых значений x при совместном рассмотре-

нии двух дробей получается исключением из множества всех рациональных чисел корней *каждого из* знаменателей $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием равенства значений двух дробей*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} \tag{1}$$

при всех допустимых значениях x является выполнение тождества:

$$f(x)\,\varphi_1(x) \equiv f_1(x)\,\varphi(x) \tag{2}$$

при всех рациональных значениях x.

Доказательство. Условие достаточно. Если выполняется тождество (2), то при всех значениях x, при которых $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi_1(x) \neq 0$, имеет место пропорция (1).

Условие необходимо. Если при всех допустимых значениях x имеет место равенство (1), то при всех *допустимых* значениях x выполняется равенство:

$$f(x)\,\varphi_1(x) = \varphi(x)\,f_1(x).$$

Следовательно, многочлены $f(x)\,\varphi_1(x)$ и $f_1(x)\,\varphi(x)$ имеют одинаковые значения при значениях x, не являющихся корнями ни одного из многочленов $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Но два многочлена, совпадающие на бесконечном множестве значений x (см. § 15, следствие, стр. 48), являются тождественными при всех рациональных x, ч. т. д.

Теорема может быть распространена на дроби с любым числом аргументов (доказательство опускаем).

Согласно общему определению тождественности двух алгебраических выражений, две дроби $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y \ldots)}$ и $\frac{P_1(x, y, \ldots)}{Q_1(x, y, \ldots)}$ считаются тождественными, если их значения одинаковы при всех допустимых (для обеих дробей) системах значений аргументов. Две дроби могут быть тождественными, но иметь различные допустимые значения для аргументов. Иначе говоря, при переходе к тождественной дроби множество допустимых значений аргументов может измениться. Так, например, дроби $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ и $\frac{x-1}{x+1}$ тождественны, ибо их значения равны при всех значениях x, допустимых как для первой дроби, так и для второй. Для первой дроби, взятой в отдельности, множество допустимых значений x состоит из всех чисел, отличных от ± 1, а для второй из всех чисел, отличных от -1. Таким образом, $x = 1$ есть допустимое значение аргумента для второй дроби, но не есть допустимое значение для первой дроби. Доказанная теорема освобождает нас от необходимости при установлении тождественности рациональных дробей принимать во внимание допустимые значения аргументов, так как для тождественности двух дробей $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ необходимо и достаточно наличия тождественности произведений „крест-на-крест“ PQ_1 и P_1Q при всех (а не только при допустимых) значениях аргументов. В силу сказан-

ного, применительно к рациональным дробям определение тождественности может быть заменено следующим эквивалентным определением.

Определение. *Две рациональные дроби*

$$\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)} \text{ и } \frac{P_1(x, y, \ldots)}{Q_1(x, y, \ldots)}$$

называются тождественными:

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1},$$

если имеет место тождество:

$$PQ_1 \equiv P_1Q$$

при всех значениях аргументов.

Примеры: 1) Дроби $\frac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}$ и $\frac{1}{x-1}$ тождественны, так как

$$(x^2+1)(x-1) \equiv x^3-x^2+x-1.$$

2) Дроби $\frac{x^2}{x}$ и x тождественны, ибо $x^2 \cdot 1 = x \cdot x$. Их значения равны при любом $x \neq 0$. Если $x=0$, то дробь $\frac{x^2}{x}$ теряет смысл, хотя вторая функция, т. е. x, смысла не теряет.

3) Дроби $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$ и $\frac{x-y}{x+y}$ тождественны, ибо

$$(x^2-y^2)(x+y) \equiv (x^2+2xy+y^2)(x-y),$$

их значения равны при любых значениях x и y, кроме $x=-y$.

4) Выражения $\frac{x^2-x^2}{x-x}$ и $x+x$ нельзя считать тождественными, ибо, несмотря на наличие тождества $x^2-x^2 \equiv (x+x)(x-x)$, первое выражение, будучи бессмысленным при всех значениях x, не рассматривается как рациональная дробь.

Основываясь непосредственно на последнем определении, покажем, что понятие тождественности рациональных дробей обладает основными свойствами равенств.

1. *Рефлексивность:*

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P}{Q}.$$

Доказательство очевидно: $P \cdot Q \equiv Q \cdot P$.

2. *Транзитивность:*

если

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1} \text{ и } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2},$$

то

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_2}{Q_2}.$$

Доказательство. По условию имеем $PQ_1 \equiv P_1Q$ и $P_1Q_2 \equiv P_2Q_1$. Откуда, перемножая, получим

$$(PQ_2)\cdot(P_1Q_1) \equiv (P_2Q)\cdot(P_1Q_1).$$

Следовательно,

$$PQ_2 \equiv P_2Q, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. Если $K(x, y, \ldots)$ *не есть нуль-многочлен, то*

$$\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)} \equiv \frac{K(x, y, \ldots)\, P(x, y, \ldots)}{K(x, y, \ldots)\, Q(x, y, \ldots)}.$$

Доказательство.

$$P(x, y, \ldots)\,[K(x, y, \ldots)\, Q(x, y, \ldots)] \equiv$$
$$\equiv [K(x, y, \ldots)\, P(x, y, \ldots)]\, Q(x, y, \ldots), \text{ ч. т. д.}$$

На этой теореме основано правило сокращения дробей. *Если $D(P, Q)$ общий наибольший делитель числителя и знаменателя данной рациональной дроби:*

$$P \equiv D(P, Q)\cdot p(x, y, \ldots),\ Q \equiv D(P, Q)\cdot q(x, y, \ldots),$$

то

$$\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)} \equiv \frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)},$$

где

$$p(x, y, \ldots) \text{ и } q(x, y, \ldots)$$

взаимно простые многочлены. Дробь со взаимно простым числителем и знаменателем называется несократимой.

Теорема. *Если дробь $\frac{P}{Q}$ тождественна несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то существует такой многочлен $K(x, y, \ldots)$, что*

$$P(x, y, \ldots) \equiv K(x, y, \ldots)\, p(x, y, \ldots)$$

и

$$Q(x, y, \ldots) \equiv K(x, y, \ldots)\, q(x, y, \ldots).$$

Доказательство. Из условия тождественности $pQ \equiv Pq$ следует, что произведение Pq делится на p. Но так как p и q взаимно просты, то P делится на p: $P \equiv Kp$, и мы получим:

$$pQ \equiv pKq \text{ или } Q \equiv Kq, \text{ ч. т. д.}$$

Несократимые дроби $p(x, y, \ldots)$ и $q(x, y, \ldots)$ определяются с точностью до числовых множителей. Для дробей с рациональными коэффициентами (которые рассматриваются в данной главе) можно коэффициенты многочленов p и q считать целыми. В самом деле, достаточно все коэффициенты привести к общему знаменателю, а затем умножить $p(x, y, \ldots)$ и $q(x, y, \ldots)$ на этот знаменатель.

Параллелизм учения о делимости многочленов и целых чисел позволяет построить теорию рациональных алгебраических дробей от

данных аргументов в строгом соответствии с арифметической теорией дробных чисел. Определение тождественности алгебраических дробей и последующие теоремы не только по содержанию, но и по методам доказательств строго аналогичны соответствующим предложениям, на основе которых в арифметике строится теория дробных чисел. Дальнейшее изложение теории алгебраических дробей было бы дословным повторением уже известных учащимся рассуждений. В самом деле, так как отправные положения, лежащие в основе обеих теорий (дробных чисел и алгебраических дробей), одинаковы, то одинаковы и вытекающие из них следствия. Как и в арифметике, имеем:

1° *Алгебраические дроби можно приводить к общему знаменателю.*

2° *Действия над алгебраическими дробями определяются согласно известным правилам:*

$$\frac{P}{Q} \pm \frac{M}{N} = \frac{PN \pm QM}{QN}; \quad \frac{P}{Q} \cdot \frac{M}{N} = \frac{PM}{QN};$$

$$\frac{P}{Q} : \frac{M}{N} = \frac{PN}{QM}.$$

3° *Если заменить дроби-компоненты тождественными дробями, то в результате выполнения действий получаются тождественные дроби.*

4° *Имеют место основные законы действий.*

В современной алгебре рассматриваются поля, элементами которых могут быть не только числа, но и другие объекты. Под полем подразумевается такое кольцо, в котором выполнима операция деления, кроме деления на „нулевой элемент" кольца, т. е. на элемент вида $a - a$ (например, число нуль в числовом кольце, нуль-многочлен в кольце многочленов. Подробнее см. гл. VII, § 81).

Выполнимость действий сложения и умножения, подчиняющихся основным законам действий, а также выполнимость обратных операций вычитания и деления (кроме деления на нуль-многочлен) показывает, что множество алгебраических дробей обладает всеми свойствами поля, а поэтому оно и называется полем рациональных функций (от данных аргументов).

Всякое рациональное алгебраическое выражение, посредством последовательного выполнения в надлежащем порядке тождественных преобразований многочленов и дробей, может быть представлено в виде отношения двух многочленов, т. е. в виде рациональной дроби. При всех системах значений букв, допустимых для данного и для преобразованного выражений, их численные значения одинаковы. В самом деле, в результате сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей мы снова получаем рациональную дробь, поэтому последовательное применение этих операций в любом количестве и в любых комбинациях позволяет *всякое сложное рациональное выражение представить в виде тождественного ему отношения двух многочленов и окончательно в виде некоторой несократимой дроби.*

Исключение может представиться, если в процессе преобразований обнаружится, что данное выражение не имеет смысла ни при каких значениях аргументов, но тогда его нельзя рассматривать как рациональное выражение.

Если дробь $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ тождественна несократимой дроби $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$, то множества допустимых значений аргументов для этих дробей могут быть различными. В самом деле, имеем:

$$P \equiv K \cdot p \quad \text{и} \quad Q \equiv K \cdot q.$$

Всякая система значений $x = x_0$, $y = y_0$, ..., при которой $K(x_0, y_0, \ldots) = 0$, но $q(x_0, y_0, \ldots) \neq 0$, является допустимой для дроби $\frac{p}{q}$, но не является таковой для дроби $\frac{P}{Q}$, поскольку последняя дробь при $x = x_0$, $y = y_0$, ... теряет смысл. Положение вещей, при котором два тождественные рациональные выражения могут иметь различные множества допустимых значений (или систем значений) аргумента (аргументов), представляется „неестественным“. Устранить эту „неестественность“ можно, приняв следующее дополнительное определение.

Определение. *Если некоторое рациональное выражение* $\Phi(x, y, \ldots)$, *теряет смысл при* $x = x_0$, $y = y_0$, ..., *но тождественная ему несократимая дробь* $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$, *при* $x = x_0$, $y = y_0$, ... *смысла не теряет, то условимся значение* $\Phi(x, y, \ldots)$ *при* $x = x_0$, $y = y_0$, ... *считать равным соответствующему значению тождественной несократимой дроби:*

$$\Phi(x_0, y_0, \ldots) = \frac{p(x_0, y_0, \ldots)}{q(x_0, y_0, \ldots)}.$$

Если система значений $x = x_0$, $y = y_0$, ... не является допустимой для несократимой дроби $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$ [т. е. $q(x_0, y_0, \ldots) = 0$], то она считается недопустимой и для любого выражения $\Phi(x, y, \ldots)$, тождественного дроби $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$. Принятое дополнительное определение позволяет беспрепятственно производить сокращение алгебраических дробей.

Итак, из изложенного следует, что *для всякого рационального выражения существует так называемое каноническое представление в виде несократимой дроби. Различные рациональные выражения, тождественные одной и той же несократимой дроби, рассматриваются лишь как внешне различные изображения одной и той же рациональной функции.*

Часто встречающееся в школьном курсе (см. школьные задачники) требование „упростить выражение“ обычно означает требование привести данное выражение к каноническому виду.

Примеры: 1) Дробь $\frac{x^2-1}{x(x-1)}$ при $x=1$ имеет значение, равное значению тождественной несократимой дроби $\frac{x+1}{x}$, т. е. числу 2.

2) Дробь $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ при $x=2$, $y=2$ имеет значение, равное значению тождественной несократимой дроби $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$, т. е. числу 3. Эта же дробь при $x=2$, $y=-2$ не имеет никакого значения, так как в этом случае теряет смысл тождественная несократимая дробь.

3) Дробь $\frac{(x+1)(x^2-y^2)}{(x+1)(x^2+y^2)}$ не имеет смысла при $x=y=0$, так как при этих значениях аргументов теряет смысл несократимая дробь $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

4) Рассмотрим выражение

$$\Phi(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+1\right).$$

Выполняя элементарные тождественные преобразования, получим:

$$\Phi(x)=\frac{x-2}{x}\left(\frac{(x-2)-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}\right)=$$
$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}.$$

При $x=2$ следует считать значение $\Phi(x)$ равным $-\frac{1}{2}$. При $x=0$ и $x=1$ выражение $\Phi(x)$ не имеет смысла.

Примеры на преобразование дробных выражений
1) Упростить выражение

$$S=\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$$

Решение. Выполняем действия в следующем порядке:

a) $\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-$

$$-\frac{3yz}{z+y}=\frac{(y^2-yz+z^2)(y+z)+x^3-3xyz}{x(y+z)}=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)};$$

b) $\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{yx}}=\frac{\frac{2(y+z)}{yz}}{\frac{x+y+z}{xyz}}=\frac{2x(y+z)}{x+y+z};$

c) $S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)}\cdot\frac{2x(y+z)}{x+y+z}+(x+y+z)^2=$

$$=2\frac{x^3+y^3+z^3-3xy}{x+y+z}+(x+y+z)^2,$$

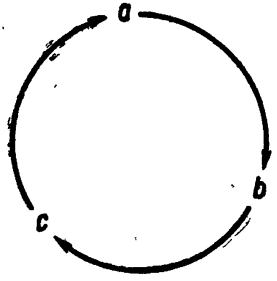
Воспользовавшись тождеством, выведенным в примере 10 предыдущего параграфа, получим

$$S=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+(x+y+z)^2=$$
$$=3(x^2+y^2+z^2).$$

2) Доказать, что

$$P=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$

обращается в нуль при всех допустимых значениях a, b и c, где допустимыми считаются любые значения букв, удовлетворяющие условиям: $a\neq b$, $b\neq c$, $a\neq c$ и



Черт. 4.

$$Q=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0. \quad (3)$$

Решение. Заметим следующее свойство выражения P. Если взять его первый член $\frac{a}{(b-c)^2}$ и сделать в нем круговую перестановку букв, заменив a на b, b на c и c на a (согласно схеме, изображенной на черт. 4), то получится второй член. Подвергая второй член круговой перестановке, получим третий член. Это свойство позволяет упростить вычисления. Покажем, что

$$P\equiv\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right). \quad (4)$$

В самом деле, разность между P и выражением в правой части (4) равна

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right]+\frac{1}{c-a}\left[\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}\right]+\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right].$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right]=\frac{ab-b^2+c^2-ac}{(b-c)(c-a)(a-b)}. \quad (5)$$

Оставшиеся два слагаемые получим круговой перестановкой букв. При круговой перестановке знаменатель дроби в правой части (5) не меняется, а числитель принимает вид:

$$bc-c^2+a^2-ba.$$

Применяя еще раз круговую перестановку, получим числитель третьего слагаемого:

$$ca-a^2+b^2-cb.$$

Как легко видеть, сумма числителей, а следовательно, и сумма дробей тождественно равна нулю. Отсюда следует тождество (4). Из этого тождества и вытекает равенство $P=0$ при соблюдении условия (3).

3) Доказать тождество

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}=\frac{Ma+N}{a-b}\frac{1}{x-a}-\frac{Mb+N}{a-b}\frac{1}{x-b}. \quad (6)$$

Решение. Дробь $\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}$ является правильной относительно аргумента x (т. е. степень числителя дроби ниже степени знаменателя). Попы-

таемся представить данную дробь в виде суммы двух правильных дробей с знаменателями $x-a$ и $x-b$. Числители этих дробей должны быть некоторыми числами A и B:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}.$$

Это тождество будет иметь место, если многочлен $Mx+N$ тождественен многочлену-числителю, который получается после сложения дробей в правой части

$$Mx+N\equiv A(x-b)+B(x-a). \qquad (7)$$

Последнее равенство должно быть верным при всех значениях x; положив в частности сперва $x=a$, а затем $x=b$, найдем:

$$A=\frac{Ma+N}{a-b} \text{ и } B=-\frac{Mb+N}{a-b}.$$

При таком выборе чисел A и B равенство (7) есть тождество, ибо многочлены 1-й степени в обеих частях (7), равные при двух значениях x ($x=a$ и $x=b$), должны быть тождественными. Подставляя найденные значения A и B, получим тождество (6). Применим, например, (6) к разложению дроби $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}.$$

Глава III

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 23. Общие понятия

Определение. *Линейным уравнением или уравнением 1-й степени называется уравнение 1-й степени относительно неизвестных.*

В настоящей главе мы будем изучать системы линейных уравнений, т. е. системы, состоящие из уравнений 1-й степени. Примерами таких систем могут служить:

1. $\left.\begin{aligned} x-y&=1\\ x+y&=3 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=4\\ 4x+6y&=5 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x+\ y&=1\\ 2x+2y&=2 \end{aligned}\right\}$

4. $x+y=0,\ y+z=3,\ x+z=5.$

5. Уравнение $xy-1=0$ не есть линейное, так как оно содержит член 2-й степени относительно неизвестных.

Определение. *Решением системы уравнений называется такая система численных значений неизвестных, при которой значения обеих частей каждого из уравнений системы одинаковы.*

Кратко говорят, что решение системы удовлетворяет уравнениям данной системы. В приведенных примерах пара чисел $x=2$, $y=1$ есть решение системы 1, пара чисел $x=3$, $y=2$ не является решением той же системы. Система 2 не имеет решений, так как в противном случае значение левой части первого уравнения было бы равно числу 4, а значение левой части второго уравнения $4x+6y=2(2x+3y)$ было бы равно числу 8, а не числу 5. Каждая пара чисел $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=1$ является решением системы 3. Система 3-х чисел $x=1$, $y=-1$, $z=4$ является решением системы 4.

В настоящей главе мы будем изучать уравнения и системы уравнений 1-й степени с произвольными рациональными коэффициентами.

Уравнение 1-й степени с одним неизвестным (после элементарных преобразований) может быть приведено к виду:

$$ax=b, \tag{1}$$

где a и b — данные рациональные числа. Если $a\neq 0$, то, в силу выполнимости деления в поле рациональных чисел, находим единственное решение уравнения (1) в виде частного $x=\frac{b}{a}$. При $a=0$ уравнение (1) перестает быть уравнением 1-й степени. Если $a=0$ и $b\neq 0$, то уравнение (1) не имеет решений. Наконец, при $a=0$ и $b=0$ левая часть тождественно равна нулю, а потому уравнению удовлетворяет произвольное значение x.

Одно уравнение 1-й степени с несколькими неизвестными в общем случае имеет бесконечное множество решений. Рассмотрим, например, уравнение $ax+by=c$, где $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Прибавляя к обеим частям по $-by$ и деля на a, найдем:

$$x=\frac{c-by}{a}. \tag{2}$$

Придавая y произвольное значение и взяв для x соответствующее значение из формулы (2), мы получим пару чисел, удовлетворяющую данному уравнению:

$$a\left(\frac{c-by}{a}\right)+by\equiv(c-by)+by=c.$$

§ 24. Система уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными вида:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Допустим, что система (I) имеет хотя бы одно решение x, y. Умножим первое уравнение (т. е. обе его части) на a_2, а второе на a_1

и вычтем почленно из первого второе. Затем умножим первое уравнение на b_2, а второе на b_1 и вычтем из второго первое, получим:

$$\left.\begin{aligned}(a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1\\ (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1\end{aligned}\right\} \qquad (I')$$

Из рассуждений следует, что любая пара чисел x и y, удовлетворяющая системе (I), удовлетворяет и системе (I'). Поэтому систему (I') будем называть выводной системой. Итак, все решения системы (I) следует искать среди решений выводной системы (I'). Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (I') имеет единственное решение:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (II)$$

Следовательно, единственно возможное решение системы (I) дают формулы (II). Однако без непосредственной проверки нельзя утверждать, что полученная пара чисел действительно есть решение первоначальной системы (I). Производя подстановку в 1-е уравнение системы (I), найдем

$$a_1\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1c_1b_2 - a_1c_2b_1 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1.$$

Точно так же проверкой покажем, что система чисел (II) есть решение второго уравнения.

Благодаря этой проверке, выполненной в общем виде, становится излишней проверка в каждом конкретном примере.

Итак, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (I) имеет единственное решение (II).

Нижеследующий пример показывает, что в общем случае выводная система (I') может иметь решения не являющиеся решениями системы (I). Пусть $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, но хотя бы одно из чисел c_1 и c_2 отлично от нуля, тогда система (I) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}0x + 0y &= c_1\\ 0x + 0y &= c_2\end{aligned}\right\}$$

Ясно, что эта система не имеет решений. Однако выводная система (I') примет вид $0x = 0$, $0y = 0$, она удовлетворяется при произвольных значениях x и y.

§ 25. Детерминанты 2-го порядка

Определение. *Детерминантом 2-го порядка, составленным из таблицы четырех чисел:*

$$a_1,\ b_1,$$
$$a_2,\ b_2,$$

называется число

$$a_1b_2 - a_2b_1.$$

Для обозначения детерминанта употребляется символ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 3 = 1.$$

§ 26. Правило Крамера

Детерминанты позволяют представить решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в следующем удобном для запоминания виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \tag{II'}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Определение. *Детерминант* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, *составленный из коэффициентов при неизвестных, называется детерминантом системы.*

Формулы (II') выражают следующее ***правило Крамера:*** *Если детерминант системы не равен нулю, то система (I) имеет единственное решение: значение неизвестного равно дроби, знаменатель которой есть детерминант системы, а числитель есть детерминант, получающийся из детерминанта системы заменой коэффициентов при этом неизвестном свободными членами.*

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Решение. Составляем детерминант системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-1)\cdot 1 = 3.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то можно применить правило Крамера:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

§ 27. Свойства детерминантов 2-го порядка

Теорема. *Значение детерминанта не изменится при замене его строк столбцами:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Вычисляя обе части, получим одно и то же число

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. *При перестановке столбцов (или строк) детерминанта знак детерминанта меняется на обратный.*

Доказательство. Вычисляя значения детерминантов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

получим числа $a_1b_2-a_2b_1$ и $b_1a_2-a_1b_2$, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, ч. т. д.

Теорема. *Детерминант равен нулю в том, и только в том случае, если элементы его строк* (столбцов) *пропорциональны.*

Доказательство. 1° Пусть элементы строк детерминанта Δ пропорциональны:

$$a_2=ka_1,\ b_2=kb_1.$$

Тогда имеем: $a_1b_2=a_2b_1$, откуда:

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0.$$

2° Обратно, пусть

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0. \tag{1}$$

Допустим, что хотя бы один из элементов детерминанта отличен от нуля. Пусть для определенности $a_1\neq 0$. Обозначим $\frac{a_2}{a_1}=k$ или $a_2=ka_1$. Из условия (1) получим $b_2=kb_1$. Итак,

$$a_2=ka_1,\ b_2=kb_1. \tag{2}$$

Если все элементы детерминанта равны нулю, то равенства (2) также справедливы (при любом k), ч. т. д.

§ 28. Исследование системы двух уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\Delta,\quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\Delta_1,\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\Delta_2.$$

Исследование системы проводится в соответствии со следующими возможными случаями:

1° $\Delta \neq 0$. В этом случае система имеет единственное решение.

2° $\Delta = 0$, но хотя бы один из детерминантов Δ_1 и Δ_2 отличен от нуля. Если $\Delta = 0$, то коэффициенты при неизвестных пропорциональны

$$a_2 = ka_1 \text{ и } b_2 = kb_1. \tag{2}$$

Но $c_2 \neq kc_1$, так как в противном случае были бы равны нулю Δ_1 и Δ_2. Система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ ka_1x + kb_1y &= c_2. \end{aligned}$$

Данная система не имеет решений, так как в противном случае значение левой части 2-го уравнения было бы $k(a_1x + b_1y) = kc_1$, не равное c_2.

3° $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, но хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Пусть, например, $a_1 \neq 0$. В этом случае коэффициент пропорциональности k в соотношениях (2) равен $\frac{a_2}{a_1}$. Из условия $\Delta_2 = 0$ следует, что $c_2 = kc_1$. Система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ ka_1x + kb_1y &= kc_1. \end{aligned}$$

Значит, второе уравнение есть следствие первого. Поэтому всякое решение первого уравнения есть решение системы, а одно уравнение с двумя неизвестными имеет в общем случае бесконечное множество решений.

Примеры случаев 2° и 3° дают системы (2) и (3) в § 23.

4° Все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если хотя бы один из свободных членов c_1 и c_2 отличен от нуля, то система не имеет решений. Если $c_1 = c_2 = 0$, то система удовлетворяется тождественно произвольными значениями x и y.

Случаи 1°, 2° и 3° имеют следующую геометрическую интерпретацию. В случае 1° прямые, изображаемые в декартовой системе координат уравнениями (1), пересекаются в одной точке. В случае 2° прямые параллельны. В случае 3° прямые совпадают. В случае же 4° ни одно из уравнений не изображает никакой прямой.

§ 29. Детерминанты 3-го порядка

К понятию детерминанта 3-го порядка приводит решение системы трех уравнений 1-й степени с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Если решать эту систему, то для неизвестного x получится следующее выражение:

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}$$

в предположении, что знаменатель отличен от нуля. Числитель выражения для x получится из знаменателя заменой коэффициентов (правило Крамера) при x свободными членами. Аналогично могут быть найдены выражения для y и z.

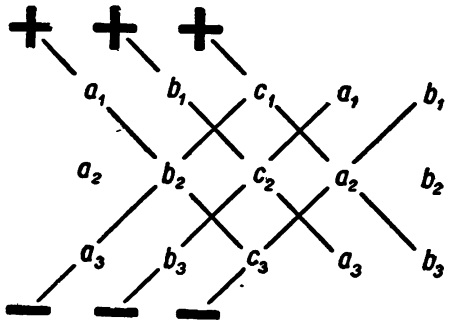


Схема I.

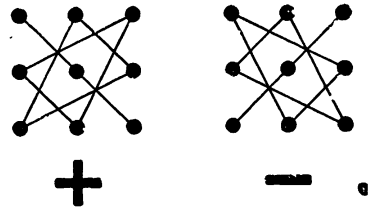


Схема II.

Определение. *Детерминантом 3-го порядка, составленным из таблицы девяти чисел:*

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, \end{matrix}$$

называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Вычисление детерминантов 3-го порядка можно производить по следующему правилу Сарруса. Дописав к данной таблице первый и второй столбцы, составим произведение элементов $a_1b_2c_3$, находящихся на „главной диагонали“ (схема I), а также элементов, находящихся на „параллельных диагоналях“, и возьмем эти произведения со своим знаком; составим произведение элементов $a_3b_2c_1$, находящихся на „побочной диагонали“, а также на „параллельных диагоналях“, и возьмем эти произведения с обратным знаком. Алгебраическая сумма всех произведений равна Δ. Можно воспользоваться правилом Сарруса в следующей видоизмененной форме, называющейся схемой треугольников (схема II). На левой схеме соединены места таблицы, для которых произведения элементов следует взять со своим знаком. На правой схеме соединены те места таблицы, для которых произведения элементов следует брать с обратным знаком.

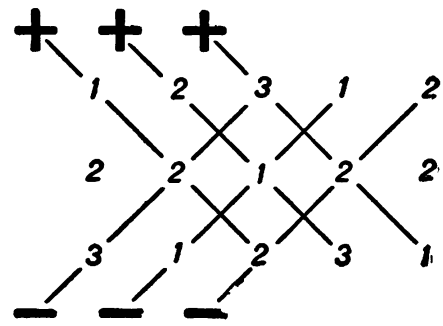


Схема III.

Пример. Вычислить детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно правилу Сарруса, имеем (схема III)

$$\Delta = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 2 = -11.$$

§ 30. Свойства детерминантов 3-го порядка

Теорема. *Значение детерминанта не изменится при замене элементов его строк элементами соответствующих столбцов:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Доказательство. Достаточно развернуть обе части равенства (1) по правилу Сарруса.

Доказанная теорема выражает свойство „равноправности" строк и столбцов детерминанта. Для строк и столбцов принято пользоваться общим термином „ряд".

Рассматривая развернутое выражение для детерминанта 3-го порядка, легко заметить, что каждый член алгебраической суммы, с точностью до знака, равен произведению трех элементов, из которых никакие два не находятся в одном и том же столбце или в одной и той же строке. Возьмем один из элементов детерминанта, например a_1. Этот элемент содержится в двух членах $a_1b_2c_3$ и $-a_1b_3c_2$. Вынося за скобку a_1, получим множитель $b_2c_3 - b_3c_2$, с которым элемент a_1 входит в выражение детерминанта. Этот множитель называется адъюнктом элемента a_1 и обозначается символом A_1. Адъюнкт A_1 может быть представлен в виде детерминанта 2-го порядка:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Вместо a_1 можно взять любой другой элемент детерминанта. Возьмем, например, b_1. Как легко проверить, элемент b_1 входит в выражение детерминанта с множителем, равным

$$B_1 = (c_2a_3 - a_2c_3) = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Определение. *Множитель, с которым данный элемент входит в выражение детерминанта, называется адъюнктом этого элемента.*

Из рассмотрения выражений адъюнктов различных элементов детерминанта (что предоставляем учащимся) устанавливается следующее

Правило: *для нахождения адъюнкта данного элемента достаточно вычеркнуть строку и столбец, которым принадлежит элемент, из оставшихся элементов образовать детерминант 2-го порядка, взяв его со своим или с обратным знаком согласно схеме* IV.

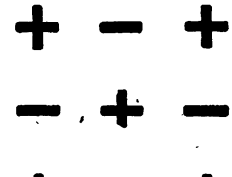


Схема IV.

Теорема. *Значение детерминанта 3-го порядка равно сумме парных произведений элементов какого-либо ряда на соответствующие адъюнкты этих элементов.*

Доказательство. Рассмотрим элементы, принадлежащие какому-либо ряду, например 1-й строке. Сгруппируем члены детерминанта следующим образом: в первую группу соберем члены, содержащие a_1, во вторую b_1 и в третью c_1, тогда получим:

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1.$$

Аналогично можно поступать с элементами любого ряда, это приводит к следующим тождествам, носящим название разложения детерминанта по элементам данного ряда (столбца или строки):

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 =$$
$$= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \text{ и т. д.}$$

Разложение детерминанта по элементам ряда позволяет свести вычисление детерминанта 3-го порядка к вычислению детерминантов 2-го порядка.

Пример. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Разлагая по элементам 1-го столбца, получим:

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = -2.$$

Теорема. *Если каждый элемент некоторого ряда представлен в виде суммы двух слагаемых, то детерминант может быть представлен соответственно в виде суммы двух детерминантов.*

Так, например:

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Разлагая детерминант в левой части написанного равенства по элементам первого столбца, получим:

$$\Delta = (a_1' + a_1'')A_1 + (a_2' + a_2'')A_2 + (a_3' + a_3'')A_3 =$$
$$= (a_1'A_1 + a_2'A_2 + a_3'A_3) + (a_1''A_1 + a_2''A_2 + a_3''A_3) = \Delta' + \Delta'',$$

ч т. д.

Теорема. *Множитель, общий всем элементам некоторого ряда, может быть вынесен за знак детерминанта.*

Так, например:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Разлагая детерминанты по элементам 1-го столбца, получим:

$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + ka_3A_3 = k(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) = k\Delta,$$

ч. т. д.

Теорема. *При перестановке двух параллельных рядов абсолютная величина детерминанта остается прежней, а знак меняется на обратный.*

Доказательство. Покажем, например, что детерминанты

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. В самом деле, адъюнкты элементов a_1, a_2 и a_3 в обоих рассматриваемых детерминантах могут быть представлены в виде детерминантов второго порядка с теми же элементами, но с переставленными столбцами, следовательно, соответственные адъюнкты элементов a_1, a_2 и a_3 отличаются лишь знаками. Разложив оба детерминанта по элементам 1-го столбца, убедимся в справедливости теоремы, ч. т. д.

Теорема. *Если элементы некоторого ряда детерминанта пропорциональны (в частности равны) соответствующим элементам параллельного ряда, то детерминант равен нулю.*

Доказательство. Положим для определенности, что элементы второго столбца пропорциональны элементам первого столбца:

$$b_1 = ka_1, \quad b_2 = ka_2, \quad b_3 = ka_3.$$

Все адъюнкты элементов 3-го столбца детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

равны нулю как детерминанты 2-го порядка с пропорциональными столбцами, а потому:

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0,$$

ч. т. д.

Теорема. *Сумма парных произведений элементов некоторого ряда на адъюнкты соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.*

Доказательство. Покажем, например, что сумма парных произведений элементов первого столбца на адъюнкты соответствующих элементов второго столбца равна нулю:

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0.$$

Заменим в разложении детерминанта по элементам второго столбца

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

элементы 2-го столбца b_1, b_2, b_3 элементами первого столбца, тогда получится разложение детерминанта, у которого элементы второго столбца соответственно равны элементам первого, но такой детерминант равен нулю, ч. т. д.

Рассмотрим таблицу:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_1a_1 + k_2a_2 & k_1b_1 + k_2b_2 & k_1c_1 + k_2c_2. \end{array}$$

Если элементы первой и второй строк этой таблицы умножить соответственно на k_1 и k_2 и сложить по столбцам, то в сумме получим элементы 3-й строки. Будем говорить, что третья строка является линейной комбинацией первой и второй строк с коэффициентами, равными k_1 и k_2.

Пример. Третья строка таблицы

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{array}$$

есть линейная комбинация первых двух с коэффициентами 2 и 3, ибо

$$11 = 2\cdot 1 + 3\cdot 3; \quad 1 = 2\cdot 2 + 3\cdot(-1); \quad 4 = 2\cdot(-1) + 3\cdot 2.$$

Теорема. *Если какой-либо ряд детерминанта есть линейная комбинация двух других параллельных рядов, то детерминант равен нулю.*

Доказательство. Положим для определенности, что третья строка есть линейная комбинация первой и второй строк с коэффициентами, равными k_1 и k_2:

$$a_3 = k_1a_1 + k_2a_2, \quad b_3 = k_1b_1 + k_2b_2, \quad c_3 = k_1c_1 + k_2c_2. \qquad (2)$$

Детерминант может быть представлен в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_1a_1 & k_1b_1 & k_1c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_2a_2 & k_2b_2 & k_2c_2 \end{vmatrix},$$

каждое из которых равно нулю, будучи детерминантом с пропорциональными строками, ч. т. д.

Теорема. *Если детерминант равен нулю, но адъюнкт хотя бы одного из его элементов не равен нулю, то один из рядов есть линейная комбинация двух других.*

Покажем, например, что если $\Delta = 0$, но адъюнкт $C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то третья строка есть линейная комбинация первых двух.

Доказательство. Разложим Δ по элементам 3-го столбца:

$$c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0.$$

Воспользуемся тождествами

$$a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0 \quad \text{и} \quad b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0,$$

откуда

$$a_3 = -\frac{C_1}{C_3}a_1 - \frac{C_2}{C_3}a_2, \quad b_3 = -\frac{C_1}{C_3}b_1 - \frac{C_2}{C_3}b_2, \quad c_3 = -\frac{C_1}{C_3}c_1 - \frac{C_2}{C_3}c_2.$$

Положив $k_1 = -\frac{C_1}{C_3}$ и $k_2 = -\frac{C_2}{C_3}$, получим соотношения (2), ч. т. д.

§ 31. Решение и исследование системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Составим детерминант системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

из коэффициентов при неизвестных. Допустим, что система (1) имеет решение x, y, z. Умножим последовательно данные уравнения на адъюнкты элементов первого столбца и сложим почленно, тогда получим:

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3.$$

В этом уравнении коэффициент при x есть Δ, коэффициенты при y и z равны нулю, а свободный член $d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 = \Delta_1$ получается заменой в разложении детерминанта Δ коэффициентов при x свободными членами d_1, d_2, d_3. Таким образом, как следствие из данной системы, получено уравнение, содержащее только x. Тем же методом могут быть получены два выводные уравнения, содержащие только y и только z. В первом случае достаточно уравнения системы (1) последовательно умножить на B_1, B_2, B_3, а во втором на C_1, C_2, C_3 и сложить. Таким образом, из системы (1) вытекает следующая выводная система:

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2, \quad \Delta z = \Delta_3. \qquad (1')$$

Исследование системы производится в соответствии со следующими возможными случаями.

1° $\Delta \neq 0$. Система (I′) имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{II}$$

Следовательно, единственно возможное решение системы (I) заключается в формулах (II). Непосредственной проверкой убеждаемся, что (II) является решением системы (I). Для примера произведем подстановку в первое уравнение:

$$a_1x + b_1y + c_1z = \frac{1}{\Delta}(a_1\Delta_1 + b_1\Delta_2 + c_1\Delta_3) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}[a_1(d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3) + b_1(d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3) +$$

$$+ c_1(d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3)] = \frac{1}{\Delta}[d_1(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) +$$

$$+ d_2(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2) + d_3(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3)] = \frac{1}{\Delta} \cdot d_1 \cdot \Delta = d_1.$$

Равенства (II) выражают правило Крамера, формулировка которого остается без изменения для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + 3z &= 7 \\ 2x + 3y - z &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

По правилу Крамера находим единственное решение системы:

$$x = \frac{4}{4} = 1, \quad y = \frac{0}{4} = 0, \quad z = \frac{8}{4} = 2.$$

2° $\Delta = 0$, но хотя бы один из его адъюнктов отличен от нуля и хотя бы один из детерминантов Δ_1, Δ_2 и Δ_3 отличен от нуля. Без ограничения общности можно допустить, что

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В самом деле, всегда можно, изменив нумерацию уравнений и переместив столбцы с неизвестными, поставить отличный от нуля адъюнкт на верхнее угловое место. В силу теоремы предыдущего параграфа

строка коэффициентов при неизвестных 3-го уравнения есть линейная комбинация соответствующих коэффициентов первых двух строк:

$$a_3 = k_1 a_1 + k_2 a_2, \quad b_3 = k_1 b_1 + k_2 b_2, \quad c_3 = k_1 c_1 + k_2 c_2. \qquad (1)$$

Следовательно, левая часть 3-го уравнения может быть получена из левых частей первых двух уравнений умножением соответственно на k_1 и k_2 и сложением. Легко видеть, что $d_3 \neq k_1 d_1 + k_2 d_2$. В самом деле, если бы выполнялось соотношение $d_3 = k_1 d_1 + k_2 d_2$, то, вопреки предположению, мы имели бы $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. В рассматриваемом случае система (I) противоречива. В самом деле, если бы она имела решения, то значение левой части 3-го уравнения было бы

$$k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) = k_1 d_1 + k_2 d_2,$$

что не равно d_3.

Пример 2. Исследовать систему

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= -1 \\ 11x + y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Система не имеет решений. Если левую часть первого уравнения умножить на 2, а второго на 3, и сложить, то получится левая часть 3-го уравнения.

$$2(x + 2y - z) + 3(3x - y + 2z) = 11x + y + 4z.$$

Но свободный член 3-го уравнения не получается из свободных членов первого и второго уравнений при помощи той же комбинации.

3° $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, но хотя бы один из адъюнктов Δ отличен от нуля. Будем попрежнему предполагать, что адъюнкт $C_3 \neq 0$. Теперь к соотношениям (1) присоединяется соотношение:

$$d_3 = k_1 d_1 + k_2 d_2$$

с теми же коэффициентами k_1 и k_2*.

Умножая первое и второе уравнения соответственно на k_1 и k_2, получим после сложения 3-е уравнение. Таким образом, 3-е уравнение есть следствие первых двух, оно удовлетворяется любым решением „укороченной“ системы:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned}\right\}$$

---

*) Разложив Δ_3 по элементам 3-го столбца, увидим, что и $k_1 = -\frac{C_1}{C_3}$ и $k_2 = -\frac{C_2}{C_3}$, как и в соотношениях (1).

Из условия $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ следует, что укороченную систему можно решить относительно x и y:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

В последних формулах z можно приписать произвольные числовые значения. Поэтому укороченная система, а вместе с ней система (I) имеет бесконечное множество решений.

Пример 3. Заменим в третьем уравнении примера 2 свободный член числом 3, тогда последнее уравнение примет вид:

$$11x + y + 4z = 3.$$

Это уравнение получается из 1-го и 2-го уравнений как следствие путем умножения на 2 и 3 и сложения. Первые два уравнения

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

образуют укороченную систему. Решая последнюю систему относительно x и y, получаем:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 + z & 2 \\ -1 - 2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 3z}{7}; \quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 + z \\ 3 & -1 - 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5z - 10}{7}.$$

4° Все адъюнкты Δ равны нулю, но по крайней мере один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю и хотя бы один из адъюнктов детерминантов Δ_1, Δ_2 и Δ_3 отличен от нуля. Пусть, например, $a_1 \neq 0$, из условий

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

следует пропорциональность коэффициентов первого и второго уравнений

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1. \tag{2}$$

Аналогично найдем, что коэффициенты при неизвестных первого и третьего уравнений пропорциональны:

$$a_3 = la_1, \quad b_3 = lb_1, \quad c_3 = lc_1. \tag{3}$$

Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда $d_2 \neq kd_1$.

Следовательно, в рассматриваемом случае система не имеет решений.

Пример 4. Исследовать систему

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 2x - 2y + 4z &= 3 \\ 3x - 3y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

В данном примере коэффициенты при неизвестных второго уравнения получаются из коэффициентов 1-го умножением на 2, но свободный член 2-го уравнения не может быть получен умножением свободного члена 1-го уравнения на 2. Система противоречива.

5° Все адъюнкты детерминантов Δ, Δ_1, Δ_2 и Δ_3 равны нулю, но хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Пусть, например, $a_1 \neq 0$. По условию

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, к соотношениям (2) и (3) присоединяются соответственно соотношения

$$d_2 = kd_1 \text{ и } d_3 = ld_1.$$

Таким образом, второе и третье уравнения суть следствия первого. Поэтому решением данной системы является всякое решение укороченной системы, состоящей лишь из одного первого уравнения:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1.$$

Из этого уравнения находим:

$$x = \frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1},$$

где y и z можно придавать произвольные численные значения. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Пример 5. Заменим во втором уравнении примера 4 свободный член числом 4, тогда второе уравнение примет вид

$$2x - 2y + 4z = 4.$$

В новой системе второе и третье уравнения получаются из первого умножением соответственно на 2 и на 3. Отбрасывая второе и третье уравнения и решая первое относительно x, получим множество всех решений системы:

$$x = y - 2z + 2.$$

6° Все коэффициенты при неизвестных равны нулю. В этом случае система противоречива, если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, и удовлетворяется тождественно, если все свободные члены равны нулю.

§ 32. Однородные системы

Определение. *Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю.*

Однородная система трех уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I'')$$

Однородная система не может быть противоречивой. В самом деле, всякая однородная система имеет нулевое или тривиальное решение:

$$x=y=z=0.$$

Теорема. *Чтобы система однородных уравнений (I″) имела решения, отличные от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы ее детерминант был равен нулю.*

Доказательство. Если детерминант системы отличен от нуля $\Delta\neq 0$ (случай 1°, см. предыдущий §), то, согласно правилу Крамера, система имеет единственное решение. В данном случае это будет тривиальное решение. При $\Delta=0$, система состоит из двух независимых уравнений, если хотя бы один адъюнкт Δ отличен от нуля (случай 3°), или из одного независимого уравнения, если все адъюнкты равны нулю (случай 5°). Следовательно, при $\Delta=0$ система имеет бесконечное множество решений, среди которых имеются нетривиальные, ч. т. д.

Примеры 6. Однородная система, соответствующая системе, рассмотренной в примере 1:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{array}\right\}$$

имеет только тривиальное решение, ибо $\Delta=4\neq 0$.

7. Однородная система, соответствующая системе, рассмотренной в примере 2, имеет нетривиальные решения. Решая укороченную систему

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{array}\right\}$$

получим

$$x=\frac{\begin{vmatrix} z & 2 \\ -2z & -1 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{3z}{-7}; \qquad y=\frac{-5z}{-7},$$

откуда определяем y и z с точностью до множителя пропорциональности:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{-7}.$$

8. Для решения однородной системы, соответствующей системе, рассмотренной в примере 4, достаточно решить лишь одно 1-е уравнение

$$x-y+2z=0, \text{ откуда } x=y-2z.$$

§ 33. Элементарные методы решения линейных систем

Теория детерминантов позволяет провести исследование системы уравнений в общем виде и построить общие формулы, выражающие решения через коэффициенты при неизвестных и свободные члены. Однако на практике для решения систем можно пользоваться элементарными методами, не прибегая к общим формулам. Сущность элементарных методов заключается в последовательном

исключении неизвестных. Пусть, например, дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Практически представляет интерес рассмотрение случая, когда ни один из коэффициентов системы (I) не равен нулю. Допустим противное, пусть, например, $b_1=0$; тогда первое уравнение принимает вид: $a_1x=c_1$, откуда находим значение x, а из второго уравнения определяем соответствующее значение y.

Итак, будем считать, что ни один из коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 не равен нулю.

Возьмем одно из уравнений данной системы (например 1-е):

$$a_1x+b_1y=c_1. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений, которые получим, придавая одному из неизвестных, например x, произвольные численные значения и определяя из уравнения (1) соответствующие значения другого неизвестного:

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}. \qquad (1')$$

Пара чисел

$$x,\ y=\frac{c-a_1x}{b_1} \qquad (2)$$

при любом x есть решение уравнения (1), т. е. имеет место тождество:

$$a_1x+b_1\frac{c_1-a_1x}{b_1}\equiv c_1.$$

Определим значение x так, чтобы пара чисел (2) являлась решением второго уравнения системы (I):

$$a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2. \qquad (3)$$

Таким образом, если данная система (I) имеет решение, то оно определяется формулами (2), где x есть решение уравнения (3). Обратно, допустим, что уравнение (3) имеет решение x, это значит, что пара чисел (2) удовлетворяет второму уравнению системы:

$$a_2x+b_2y=c_2.$$

Первое уравнение системы удовлетворяется парой чисел (2) тождественно при любых x $\left(\text{где } y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}\right)$, а в частности и при найденном из уравнения (3) значении x.

Если данная система не имеет решений, то уравнение (3) также не имеет решений. Обратно, если уравнение (3) не имеет решений, то и система (I) не имеет решений.

Таким образом, решение системы (I) сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным (3) и к вычислению другого неизвестного по формуле (1').

Переход от системы (I) к уравнению (3), не содержащему y называется исключением неизвестного y. Изложенный метод носит название метода подстановки.

Исключение неизвестного можно провести и другим методом. Обозначим кратко через f_1 и f_2 левую и правую части первого и второго уравнений и запишем систему (I) так:

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2. \tag{I}$$

Пусть m_1 и m_2 — два любые отличные от нуля числа. Умножим первое уравнение на m_1, а второе на m_2 и сложим. Присоединив к найденному новому уравнению какое-либо (например, 1-е) из уравнений (I), получим систему:

$$f_1 = c_1, \quad m_1 f_1 + m_2 f_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2. \tag{I'}$$

Если пара чисел x и y есть решение системы (I), то численные значения f_1 и f_2 суть соответственно c_1 и c_2, а потому удовлетворяется система (I'). Обратно, пусть x, y есть решение системы (I'), тогда значение f_1 есть c_1; вычитая из обеих частей второго равенства (I') $m_1 c_1$, получим $m_2 f_2 = m_2 c_2$. Деля на m_2, найдем $f_2 = c_2$, т. е. пара чисел x и y есть решение системы (I). *Следовательно, всякое решение системы (I) есть решение системы (I'), и обратно — всякое решение системы (I') есть решение системы (I).* Такие системы называются эквивалентными.

Множители m_1 и m_2 можно подобрать так, чтобы второе уравнение (I') не содержало одного из неизвестных. Положим, например, $m_1 = b_2$ и $m_2 = -b_1$, тогда получим уравнение, не содержащее y. Решив это уравнение, найдем из первого уравнения соответствующее значение x. Этот метод называется методом сравнения коэффициентов.

Если данная система не имеет решения, то полученная из нее система (I') также не имеет решений.

Эти методы распространяются на системы с любым числом неизвестных. Рассмотрим, например, систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$f_1 = d_1, \quad f_2 = d_2, \quad f_3 = d_3. \tag{I}$$

Применяя метод подстановки, выразим одно из неизвестных, например z, из первого (или какого-либо другого) уравнения. Подставляя выражение z во второе и в третье уравнения, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Решая эту систему, находим x и y, а затем определяем значение z. Рассуждения, обосновывающие этот метод, ничем не отличаются от рассуждений в случае системы двух уравнений. Метод сравнения коэффициентов применяется следующим образом. Возьмем, например, первые два уравнения, умножив

их соответственно на множители m_1 и m_2, отличные от нуля, и сложим, тогда получим уравнение:

$$m_1f_1+m_2f_2=m_1d_1+m_2d_2. \tag{4}$$

Множители m_1 и m_2 выбираем так, чтобы уравнение (4) не содержало одно из неизвестных (например, z). Затем, взяв первое и третье (или второе и третье) уравнения, умножим их на отличные от нуля множители n_1 и n_2 и сложим:

$$n_1f_1+n_2f_3=n_1d_1+n_2d_3. \tag{5}$$

Числа n_1 и n_2 выберем так, чтобы уравнение (5) не содержало z.

Присоединив одно из уравнений (I) (например, 1-е), получим систему

$$f_1=d_1,\quad m_1f_1+m_2f_2=m_1d_1+m_2d_2,\quad n_1f_1+n_2f_3=n_1d_1+n_2d_3. \tag{I'}$$

Как и в случае системы двух уравнений, покажем, что системы (I) и (I') эквивалентны. Таким образом, задача сводится к решению двух уравнений (4) и (5) с двумя неизвестными x и y и к нахождению соответствующего значения z из уравнения $f_1=d_1$.

В ряде частных случаев, пользуясь специфическими свойствами данной системы, можно применять приемы, вносящие упрощения в процесс решения.

Примеры: 1. Решить систему

$$x+y=a,\quad x+z=b,\quad y+z=c.$$

Р е ш е н и е. Складывая все три уравнения и деля на 2, получим:

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Вычитая 3-е уравнение, найдем

$$x=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

и аналогично

$$y=\frac{a-b+c}{2},\qquad z=\frac{-a+b+c}{2}.$$

2. Решить систему

$$\frac{x+a}{l}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n},\quad Ax+By+Cz=D.$$

Р е ш е н и е. Введем новое неизвестное u, положив:

$$\frac{x+a}{l}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n}=u,$$

откуда

$$x=lu-a,\quad y=mu-b,\quad z=nu-c. \tag{6}$$

Подставив в последнее уравнение системы, получим:

$$(Al+Bm+Cn)\,u-Aa-Bb-Cc=D, \tag{7}$$

откуда

$$u=\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Al+Bm+Cn}\quad\text{(при условии } Al+Bm+Cn\neq 0);$$

аналогичные выражения найдем для y и z. Уравнение (7), а следовательно и система, противоречивы, если $Al+Bm+Cn=0$ и $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$.

Если $Al+Bm+Cn=0$ и $Aa+Bb+Cc+D=0$, то система имеет бесконечное множество решений, которые можно выразить формулами (6), где u любое число.

3. Решить систему

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{a+b}{a-b};\quad ax+by=a-c \quad (\text{где } a\neq b).$$

Р е ш е н и е. Первое уравнение представлено в виде пропорции, составим производную пропорцию следующим образом:

$$\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)},\quad \text{или}\quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b},$$

или, наконец, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=u$ и $x=au$, $y=bu$.

Подставляя во второе уравнение, находим $u=\frac{a-c}{a^2+b^2}$.

Следовательно, $x=\frac{a(a-c)}{a^2+b^2}$, $y=\frac{b(a-c)}{a^2+b^2}$.

4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+ay+a^2z+a^3&=0\\ x+by+b^2z+b^3&=0\\ x+cy+c^2z+c^3&=0 \end{aligned}\right\},$$

где a, b и c попарно различные между собой числа.

Р е ш е н и е. Вычитая второе уравнение из первого, получим:

$$(a-b)y+(a^2-b^2)z+(a^3-b^3)=0.$$

Сокращаем на $a-b$ (так как $a\neq b$):

$$y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)=0. \qquad (8)$$

Аналогично, вычитая из первого третье, найдем:

$$y+(a+c)z+(a^2+ac+c^2)=0;$$

вычитая уравнения, исключим y:

$$(b-c)z+(ab-ac+b^2-c^2)=0.$$

Откуда $z=-(a+b+c)$. Из (8) получим $y=ab+bc+ac$ и, наконец, воспользовавшись первым уравнением системы, найдем $x=-abc$.

5. Решить систему

$$\frac{2}{x-1}+\frac{5}{y-2}=1,\qquad \frac{1}{x-1}+\frac{3}{y-2}=2.$$

Р е ш е н и е. Введем вспомогательные неизвестные, положив

$$\frac{1}{x-1}=u,\quad \frac{1}{y-2}=v;$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} 2u+5v&=1\\ u+3v&=2 \end{aligned}\right\}$$

Умножая 2-е на 2 и вычитая из первого, получим $v=3$, $u=-7$.

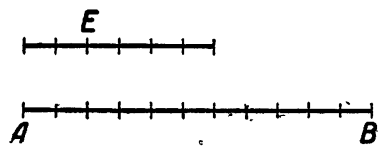
Из соотношений $\frac{1}{x-1}=u$, $\frac{1}{y-2}=v$ найдем $x=\frac{6}{7}$, $y=\frac{7}{3}$.

Глава IV

ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 34. Основные понятия

Задача измерения величин приводит к необходимости дальнейшего расширения понятия числа, ибо поле рациональных чисел оказывается недостаточным для измерения непрерывных величин. Остановимся на задаче измерения отрезков. Мы мыслим прямую линию как непрерывное (сплошное) множество точек (в чем заключается свойство непрерывности прямой линии, будет сказано ниже). Примем некоторый отрезок E за единицу измерения.

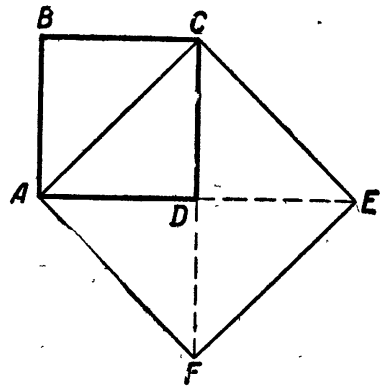


Черт. 5.

Определение. *Отрезок AB* (черт. 5) *называется соизмеримым с E, если отрезок E может быть разделен на такое число n равных частей, что $\frac{1}{n}$ часть E содержится в AB некоторое целое число m раз.*

Число $\frac{m}{n}$ выражает длину отрезка AB при единице измерения E. Покажем, что существуют отрезки несоизмеримые с E, т. е. обладающие следующим свойством: *на какое бы количество n равных частей ни был разделен единичный отрезок E, его $\frac{1}{n}$ часть не укладывается никакое целое число раз на данном отрезке.* Чтобы в этом убедиться, достаточно привести хотя бы один пример. Примем во внимание следующий арифметический факт: *Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.*

В самом деле, если бы существовало рациональное число, квадрат которого равен числу 2, то уравнение $x^2 = 2$ или $x^2 - 2 = 0$ имело бы хотя бы один рациональный корень. Возможные рациональные корни данного уравнения должны быть целыми числами и являются делителями числа -2, т. е. числами ± 1 и ± 2, но ни одно из этих чисел данному уравнению не удовлетворяет.



Черт. 6.

Теорема. *Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

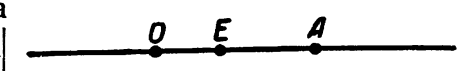
Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный квадрат. Площадь квадрата $ACEF$, построенного на диагонали квадрата $ABCD$ вдвое больше площади $ABCD$. В самом деле (черт. 6), квадрат $ACEF$ может быть составлен из четырех, а квадрат $ABCD$ из двух равных между собой равнобедренных прямоугольных треугольников. Допустим, вопреки утверждению, что отрезки AB и AC соизмеримы, тогда су-

ществует отрезок, укладывающийся (без остатка) p раз на отрезке AB и q раз на отрезке AC. Приняв этот отрезок за единицу измерения, найдем:

$$\text{пл. } ABCD = p^2, \quad \text{пл. } ACEF = q^2,$$

и, следовательно, $q^2 = 2p^2$, откуда $2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2$, что невозможно. Следовательно, отрезки AB и AC несоизмеримы, ч. т. д.

Как известно, всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть изображено некоторой точкой A на числовой прямой; отрезок OA соизмерим с единичным отрезком: его длина выражается рациональным числом $\left|\frac{m}{n}\right|$ (черт. 7). Обратно, всякому отрезку OA, соизмеримому с единичным, может быть поставлено в соответствие рациональное число. Если отрезок OA несоизмерим с E, то отрезку OA в качестве его длины не может быть поставлено в соответствие никакого рационального числа. Если мысленно нанести на прямую точки, изображающие всевозможные рациональные числа, то прямая не будет „заполнена“ этими „рациональными“ точками, на ней останутся пробелы. Эти пробелы образуют концы отрезков, отложенных от точки O и несоизмеримых с единичным отрезком. Один из таких пробелов получится, если построить квадрат со стороной, равной E, и отложить от точки O диагональ построенного квадрата. Наличие пробелов указывает на неполноту поля рациональных чисел по сравнению с множеством всех точек прямой линии. Построение множества чисел, пригодного для измерения отрезков, требует расширения поля рациональных чисел.



Черт. 7.

Черт. 8.

Описание основных свойств геометрических объектов дается системой геометрических аксиом и относится к курсу геометрии*. Мы отметим здесь лишь следующие основные свойства, которые будем мыслить присущими прямой линии.

I. ***Аксиома Архимеда.*** *Каковы бы ни были отрезки прямой OP и OM, существует такое натуральное число n, что:*

$$nOP > OM.$$

Пояснение. Каким бы малым ни был отрезок OP (черт. 8) и как бы далеко ни стояла точка M от точки O, откладывая на прямой отрезок OP последовательно достаточно большое число раз, мы получим точку Q, расположенную правее точки M, так что отрезок OQ будет больше, чем OM.

---

* См. Б. В. Кутузов, «Геометрия» для учительских институтов, Учпедгиз, 1950.

II. ***Свойство плотности. Аксиома.*** *Каковы бы ни были две различные точки прямой A и B, на прямой существует хотя бы одна точка C, лежащая между A и B* (черт. 9).

Следствие. Существует бесконечное множество точек прямой, лежащих между A и B. В самом деле, на прямой существует (по крайней мере одна точка) точка D_1, лежащая между A и C, и точка D_2, лежащая между C и B (черт. 10). Далее, для каждой пары

Черт. 9.

Черт. 10.

AD_1, D_1C, CD_2, D_2B можно найти промежуточную точку. Этот процесс нахождения промежуточных точек можно продолжать неограниченно.

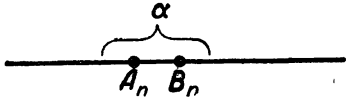
III. ***Аксиома непрерывности.*** *Если бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ..., расположенных на прямой линии, обладает следующими свойствами:*

1° *последующий отрезок содержится в предыдущем,*

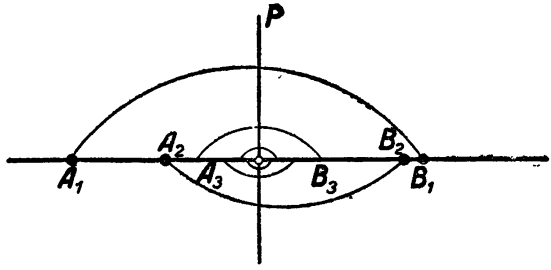
2° *каким бы малым ни был задан отрезок α, существует такое число n, что отрезок A_nB_n (а значит, и любой последующий) меньше α* (черт. 11),

то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам данной последовательности.

Эта аксиома носит название принципа стягивающихся отрезков. На чертеже 12 дано геометрическое пояснение этого принципа.



Черт. 11.



Черт. 12.

Сопоставим поле рациональных чисел с множеством точек прямой линии.

I. Для поля рациональных чисел аксиома Архимеда выполняется в следующем виде: *какими бы ни были два данные положительные рациональные числа r и R, существует такое натуральное число n, что $nr > R$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $r = \frac{p}{q}$ и $R = \frac{P}{Q}$, тогда при любом n, большем Pq, будем иметь:

$$nr = n\frac{p}{q} > Pq \cdot \frac{p}{q} = pP \geqslant P \geqslant \frac{P}{Q} = R, \text{ ч. т. д.}$$

Итак, каким бы малым ни было рациональное число $r > 0$, при достаточно большом n число nr будет бо́льшим, чем любое наперед заданное как угодно большое число R.

Числовое поле, в котором выполняется аксиома Архимеда, называется архимедовым полем.

II. *Свойство плотности также имеет место в поле рациональных чисел.* Пусть a и b два различные рациональные числа, и $a<b$. Существует хотя бы одно число, удовлетворяющее неравенствам $a<r<b$. В качестве числа, промежуточного между a и b, можно взять, например, их среднее арифметическое. В самом деле,

$$a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}<0 \text{ и } b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}>0,$$

следовательно, $a<\frac{a+b}{2}<b$.

Следствие: *существует бесконечное множество чисел, промежуточных между a и b.*

III. *Свойство непрерывности в поле рациональных чисел не имеет места.*

Будем называть рациональным сегментом $[a, b]$, ограниченным числами a и b, множество всех рациональных чисел x, заключенных между a и b, включая сами эти числа:

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

Определение. *Две последовательности рациональных чисел:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ и } b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

образуют последовательность стягивающихся рациональных сегментов

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

если:

1° *члены 1-й последовательности не убывают:*

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant \ldots \leqslant a_n\leqslant \ldots,$$

а второй не возрастают:

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant \ldots \geqslant b_n\geqslant \ldots;$$

2° *всякое число первой последовательности меньше любого числа второй последовательности:*

$$a_n<b_n;$$

3° *при достаточно большом n разность b_n-a_n будет меньшей любого наперед заданного (как угодно малого) положительного числа.*

Отсутствие непрерывности поля рациональных чисел заключается в наличии таких последовательностей стягивающихся рациональных сегментов, для которых не существует рационального числа r, общего всем сегментам данной последовательности, т. е. при всех значениях n удовлетворяющего неравенствам $a_n\leqslant r\leqslant b_n$. Чтобы это показать, достаточно привести хотя бы один пример (см. ниже пример 3).

Пример 1. Последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \text{ и } \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

определяют последовательность стягивающихся рациональных сегментов

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right], \ldots$$

В самом деле, 1° 1-я последовательность возрастает, вторая убывает; 2° при любом n имеем $\frac{n-1}{n} < \frac{n+1}{n}$ и 3° разность $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n}$ при достаточно большом n может быть сделана как угодно малой.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное как угодно малое число, тогда:

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

при любом $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Так, например, $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{100}$, если $n > 200$, и $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{1000}$, если $n > 2000$, и т. д.

Число 1 принадлежит всем промежуткам рассматриваемой последовательности, ибо при любом натуральном n имеем:

$$\frac{n-1}{n} < 1 < \frac{n+1}{n}.$$

Пример 2.

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{n}\right], \ldots$$

Здесь нуль является общим числом для всех сегментов.

Пример 3. Известный процесс извлечения квадратного корня из числа 2 с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. есть построение двух последовательностей рациональных чисел:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1{,}4,\ a_2 = 1{,}41, \ldots \qquad \{a_n\}$$
$$b_0 = 2,\ b_1 = 1{,}5,\ b_2 = 1{,}42, \ldots, \qquad \{b_n\}$$

удовлетворяющих условию:

$$a_n^2 < 2 < b_n^2 \tag{1}$$

и рассматриваемых как приближенные результаты выполнения действия по недостатку и по избытку. Рациональные сегменты:

$$[1; 2],\ [1{,}4;\ 1{,}5], \ldots, [a_n; b_n], \ldots$$

образуют последовательность стягивающихся сегментов *.

---

* Выполнение условий 1° и 2° очевидно. Условие 3° также выполняется. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное (как угодно малое) число. Изобразим ε при помощи десятичной (конечной или бесконечной) дроби $\varepsilon = p, q_1 q_2 \ldots$. Если целая часть $p \neq 0$, то $\varepsilon \geqslant 1$ и при $n \geqslant 1$ будем иметь $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$, если же $p = 0$, то последнее неравенство выполняется при любом n большем, чем нумер первого отличного от нуля десятичного знака.

Покажем, что нет рационального числа, принадлежащего всем промежуткам $[a_n, b_n]$. Допустим противное, что существует рациональное число r, удовлетворяющее неравенствам:

$$a_n \leqslant r \leqslant b_n \ (n \text{ — любое натуральное число}),$$

тогда

$$a_n^2 \leqslant r_n^2 \leqslant b_n^2 \qquad (2)$$

Разность между числами 2 и r^2, удовлетворяющими неравенствам (1) и (2) по абсолютной величине меньше разности $b_n^2 - a_n^2$:

$$|2 - r^2| < b_n^2 - a_n^2,$$

но

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) < 4(b_n - a_n) = \frac{4}{10^n}$$

$[(a_n + b_n) < 4$, так как любое из чисел a_n и b_n не превосходит числа 2$]$. Следовательно, разность между двумя определенными рациональными числами 2 и r^2 при достаточно большом n может быть сделана как угодно малой. Это может быть лишь, если $r^2 = 2$, что невозможно (стр. 94).

Последний пример показывает, что в поле рациональных чисел возможны последовательности сегментов, стягивающихся, выражаясь фигурально, к „пустому месту". Наличие подобного рода пустот на прямой линии исключается аксиомой непрерывности.

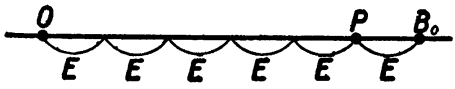
§ 35. Десятичное измерение отрезков

Рассмотрим некоторый отрезок OP, расположенный на прямой OM. Обычный процесс измерения заключается в последовательном откладывании от точки O вдоль отрезка OP единичного отрезка E. В силу аксиомы Архимеда этот процесс должен закончиться на некотором p-м шаге, так что, отложив единичный отрезок E $p+1$ раз, мы получим отрезок OB_0, больший OP (черт. 13). Возможны следующие два случая.

Черт. 13.

1° Отрезок E укладывается на OP ровно p раз, тогда длина OP выразится целым числом p (черт. 14).

2° Отрезок E на OP уложится p раз и останется в остатке отрезок A_0P, меньший E (черт. 15). Отрезок A_0B_0 содержит точку P.



Черт. 14.

Черт. 15.

Числа p и $p+1$ рассматриваются как результаты измерения OP по недостатку и по избытку с точностью до 1.

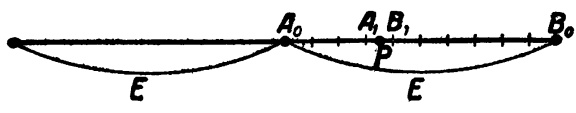
В случае 2° разделим отрезок E на 10 равных частей и будем от точки A_0 последовательно откладывать $\frac{1}{10}E$. Если отрезок $\frac{1}{10}E$,

уложится на A_0P целое число q_1 раз, то длина OP выразится числом $p+\frac{q_1}{10}=p,q_1$. Если в остатке остался некоторый отрезок, меньший $\frac{1}{10}E$, то числа

$$p+\frac{q_1}{10} \text{ и } p+\frac{q_1+1}{10}$$

рассматривают как результат измерения OP с точностью до 0,1 по недостатку и по избытку. Отложив от точки O отрезки OA_1 и OB_1 длины $p+\frac{q_1}{10}$ и $p+\frac{q_1+1}{10}$, получим отрезок A_1B_1, содержащий точку P (черт. 16).

Далее делим единичный отрезок E на 100 равных частей и откладываем последовательно от точки A_1 отрезок, равный $\frac{1}{100}E$, и так далее. Этот процесс либо закончится на некотором n-м шаге, и тогда длина отрезка OP выразится конечной десятичной дробью $p,q_1q_2\ldots q_n$ (где p — целая часть, а q_1, q_2, ..., q_n — десятичные знаки), либо может продолжаться неограниченно и приведет к бесконечной десятичной дроби:



Черт. 16.

$$p,\ q_1q_2\ldots q_n\ \ldots\ . \tag{1}$$

На практике процесс десятичного измерения всегда заканчивается. Как бы велика ни была точность измерительного инструмента, он способен различать малые величины лишь до известного предела. На практике существенно знать численное значение измеряемой величины приближенно с некоторой определенной степенью точности, однако, для абсолютно точного измерения величин, с которым оперирует математическая абстракция, множество рациональных чисел оказывается уже недостаточным.

Допустим сначала, что отрезок OP соизмерим с единичным отрезком E и его величина выражается дробью $\frac{m}{n}$. Процессу десятичного измерения в точности соответствует обращение простой дроби $\frac{m}{n}$ в десятичную. Поэтому результатом десятичного измерения отрезка соизмеримого с E является либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь. Символ (1), полученный в результате измерения отрезка OP, несоизмеримого с E, не может быть ни конечной ни периодической десятичной дробью. Допустим, что в результате измерения отрезка OP несоизмеримого с E получилась периодическая дробь (1). Обратив эту дробь в простую, получим число $\frac{m}{n}$. Рассмотрим отрезок OP_1, длина которого выражается числом $\frac{m}{n}$. Отрезок OP_1 соизмерим с E, а потому точки OP и OP_1

не могут совпасть. В результате измерения отрезков OP и OP_1 получится одна и та же периодическая дробь (1). Следовательно, любой из отрезков A_0B_0, A_1B_1, ..., A_nB_n, ... содержит обе точки P и P_1, а потому $PP_1 < A_nB_n = \frac{1}{10^n} E$, откуда $10^n PP_1 < E$ при любом (как угодно большом) натуральном n, что противоречит аксиоме Архимеда. Итак, если отрезок OP несоизмерим с E, то символ (1) есть „непериодическая дробь". Этому символу в поле рациональных чисел не соответствует никакого числа.

§ 36. Положительные действительные числа

Определение. *Будем называть положительным действительным числом всякую (конечную или бесконечную) десятичную дробь*

$$p,\ q_1q_2 \ldots q_n \ldots,$$

где p — натуральное число или 0, *а q_1, q_2, ... q_n, ... — десятичные знаки (т. е. целые числа от* 0 *до* 9).

Здесь необходимо иметь в виду то же примечание, которое было сделано относительно определения понятия отрицательного числа. Сформулированное определение само по себе, в отрыве от определений, устанавливающих соотношения взаимного расположения и действия над действительными числами, не может рассматриваться как характеризующее понятие действительного числа. Это определение является составной частью целой системы определений (приводимых ниже постепенно), полностью характеризующей действительное число.

В множестве всех положительных действительных чисел содержатся, как часть, все положительные рациональные числа, ибо всякое рациональное число может быть представлено конечной или бесконечной периодической десятичной дробью. Всякое число, изображающееся конечной десятичной дробью, можно представить при помощи бесконечной дроби двояким образом. Так, например, $0{,}3 = 0{,}3000\ldots$ и $0{,}3 = 0{,}2999\ldots$ Во избежание двойственности в изображении чисел условимся, вообще говоря, дробями с периодом 9 не пользоваться.

Бесконечные непериодические десятичные дроби представляют собой новые числа, не являющиеся рациональными, эти числа называются иррациональными числами.

Примером непериодической бесконечной десятичной дроби может служить дробь: 0,10 100 1000 10000 1 ..., где после запятой цифра 1 разделяется одним, затем двумя, затем тремя и т. д. нулями.

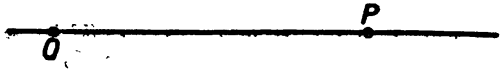
Десятичное измерение отрезка во всех случаях приводит к положительному действительному числу. В случае несоизмеримости данного отрезка с единичным результат измерения является иррациональным числом. Покажем, что справедливо обратное утверждение.

Теорема. *Для любого заданного действительного числа α существует единственный отрезок, результатом измерения которого является число α.*

Доказательство. Покажем, что на прямой линии от данной ее точки O в данном направлении (на чертеже 17 вправо) может быть отложен единственный отрезок OP, результатом измерения которого является число α. При α рациональном соответствующее построение известно из элементарной геометрии; поэтому будем предполагать число α иррациональным:

$$\alpha = p,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots .$$

Положим, например, для определенности $\alpha = 2{,}3501 \ldots$. Отложив вправо от точки O отрезки, равные 2, а затем 3 единицам масштаба, получим отрезок A_0B_0. Далее, отложив вправо от точки O отрезки, равные 2,3 и 2,4 единиц масштаба, получим отрезок A_1B_1, вложенный в отрезок A_0B_0. Затем, отложив от точки O отрезки, равные 2,35 и 2,36 единиц масштаба, получим отрезок A_2B_2, и так далее. Этим процессом определяется последовательность стягивающихся отрезков:



Черт. 17.

$$A_0B_0,\ A_1B_1,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots .$$

В самом деле:

1° Каждый последующий отрезок вложен в предыдущий.

2° Длины этих отрезков соответственно суть:

$$E,\ \frac{1}{10}E,\ \frac{1}{100}E,\ \ldots,\ \frac{1}{10^n}E,\ \ldots .$$

При достаточно большом n отрезок A_nB_n может быть сделан как угодно малым. В самом деле: пусть l любой заданный как угодно малый отрезок; при достаточно большом n будет иметь $A_nB_n < l$, так как в противном случае существовал бы такой отрезок l, что при любом n имело бы место неравенство $A_nB_n = \frac{1}{10^n}E \geqslant l$, откуда $10^n l \leqslant E$ при любом n, что противоречит аксиоме Архимеда.

В силу аксиомы непрерывности прямой линии рассматриваемая последовательность стягивающихся отрезков определяет единственную точку P прямой, принадлежащую всем отрезкам последовательности, ч. т. д.

§ 37. Отрицательные действительные числа

Всякому положительному иррациональному числу α поставим в соответствие новый объект, обозначаемый символом $-\alpha$, который назовем отрицательным иррациональным числом. Числа α и $-\alpha$ будем называть противоположными иррациональными числами.

Противоположными числами выражают результат измерения одинаковых по величине, но противоположно направленных отрезков (или

других величин). Определение абсолютной величины без изменения переносится на иррациональные числа. *Положительные и отрицательные рациональные и иррациональные числа и число 0 образуют числовое множество, называющееся множеством действительных чисел.*

Всякой точке P на числовой оси можно поставить в соответствие действительное число, измеряющее отрезок, ограниченный точкой P и точкой O (принятой за начало отсчета отрезков). Это число берется со знаком $+$, если точка P расположена „вправо" от точки O, со знаком $-$, если P расположена „влево" от точки O. Обратно, всякому действительному числу α можно поставить в соответствие точку числовой оси, отложив от точки O вправо при α положительном и влево при α отрицательном — отрезок длиною $|\alpha|$. Таким образом, *между действительными числами и точками прямой линии может быть установлено соответствие, в силу которого каждой точке прямой соответствует вполне определенное действительное число, и обратно, всякому действительному числу соответствует единственная точка прямой линии.*

Соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует вполне определенный элемент второго и, обратно, каждому элементу второго множества соответствует вполне определенный элемент первого, так, что элементы данных множеств могут быть объединены в пары взаимно-соответственных элементов, называется взаимно-однозначным соответствием.

В силу изложенного, между точками прямой линии и действительными числами может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

§ 38. Сравнение действительных чисел

Сравнение по величине рациональных чисел уже установлено в § 3, поэтому достаточно ввести дополнительное определение для случая, когда хотя бы одно из двух данных действительных чисел α и β является иррациональным. Будем предполагать, что числа α и β представлены при помощи бесконечных десятичных дробей (дроби с периодом 9 не употребляются в данных рассуждениях).

Определение. *Из двух положительных действительных чисел α и β условимся считать бóльшим то, у которого целая часть больше. Если целые части равны, то бóльшим считается число, у которого первый по порядку десятичный (вправо от запятой) знак является бóльшим, а все предшествующие одинаковы.*

Если число α больше β, то число β считается меньшим α.

Равными считаются действительные числа, изображающиеся одной и той же десятичной дробью.

Положительные и отрицательные действительные числа и нуль условимся сравнивать по правилам, установленным для сравнения рациональных чисел (§ 3).

Примеры

$$3{,}175\ldots > 2{,}983\ldots;$$
$$3{,}21\ldots < 3{,}384\ldots;$$
$$-5{,}00764\ldots > -5{,}00801\ldots,$$

так как $5{,}00764\ldots < 5{,}00801\ldots$ Из двух чисел 0,732... и 0,734... бóльшим является второе число, независимо от того, каковы последующие десятичные знаки.

Примечание. Установленное правило применимо и для сравнения рациональных чисел.

Бóльшее положительное число получается в результате измерения бóльшего отрезка. Рассмотрим, например, два числа 1,3561... и 1,3559..., имеем $1{,}3561\ldots > 1{,}3559\ldots$ Отрезок OP, измеряющийся первым числом, содержит 1356 полных тысячных долей единичного отрезка, тогда как отрезок OP_1, измеряющийся вторым числом, содержит лишь 1355 полных тысячных долей. Следовательно, $OP > OP_1$.

В множестве действительных чисел сохраняются свойства I — V скалярного расположения чисел по величине, сформулированные в § 3. Проверим, например, справедливость свойства транзитивности для любых положительных действительных чисел.

Пусть

$$\alpha = p_0,\ p_1p_2\ldots p_n\ldots$$
$$\beta = q_0,\ q_1q_2\ldots q_n\ldots$$
$$\gamma = l_0,\ l_1l_2\ \ldots\ l_n\ldots$$

причем $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, покажем, что $\alpha < \gamma$. Будем сравнивать по порядку десятичные знаки данных чисел. Так как $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $p_0 \leqslant q_0$ и $q_0 \leqslant l_0$. Если хотя бы одно из этих соотношений является неравенством, то $p_0 < l_0$, и тогда $\alpha < \gamma$. Если же $p_0 = q_0 = l_0$, то $p_1 \leqslant q_1$ и $q_1 \leqslant l_1$. Если хотя бы одно из последних соотношений есть неравенство, то $p_1 < l_1$, и мы имеем $\alpha < \gamma$. Если $p_1 = q_1 = l_1$, то сравниваем следующие десятичные знаки, и так далее. Этот процесс сравнения должен привести на некотором шаге к неравенству соответствующих знаков чисел α и γ, так как в противном случае все знаки данных чисел были бы одинаковы, и мы имели бы $\alpha = \beta = \gamma$. Итак, имеем $\alpha < \gamma$, ч. т. д.

Пример. $\alpha = 3{,}2157\ldots$, $\beta = 3{,}2241$, $\gamma = 3{,}225\ldots$; имеем $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Из сопоставления вторых знаков после запятой ясно, что $\alpha < \gamma$.

Взаимно однозначное соответствие, установленное между действительными числами и точками прямой, обладает следующим свойством сохранения порядка расположения элементов: *если число α меньше числа β, то точка A, соответствующая первому числу, расположена левее точки B, соответствующей второму числу.*

Взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок расположения элементов, называется подобием. Введением иррациональных чисел заполнились „пробелы“, которые имелись в поле рациональных чисел по сравнению с множеством точек прямой линии. Множество действительных чисел, будучи подобным множеству точек прямой линии, является вполне достаточным для измерения отрезков.

§ 39. Аппроксимация (приближение) иррациональных чисел рациональными

Пусть $\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$ некоторое положительное действительное число. Если не все десятичные знаки, стоящие после запятой, равны нулю, то (в силу определения) целое число p_0 меньше α:

$$p_0 < \alpha.$$

Целое число $p_0 + 1$ больше α, следовательно, имеем:

$$p_0 < \alpha < p_0 + 1.$$

Число p_0 называется приближенным значением числа α по недостатку, а число $p_0 + 1$ приближенным значением по избытку, с точностью до 1. Аналогично, если не все десятичные знаки, начиная со второго, равны нулю, то:

$$p_0 + \frac{p_1}{10} < \alpha < p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}.$$

Рациональные числа $p_0 + \frac{p_1}{10}$ и $p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}$ называются приближенными значениями α по недостатку и по избытку с точностью до 0,1.

Определение. *Конечные дроби*

$$p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} \text{ и } p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

между которыми заключено число α, называются его десятичными приближенными значениями по недостатку и по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Правило. *Для получения десятичного приближенного значения по недостатку данного действительного числа с точностью до* $\frac{1}{10^n}$, *следует в десятичной дроби, изображающей это число, сохранить n первых десятичных знаков и откинуть все последующие. Увеличив на 1 последний десятичный знак приближенного значения по недостатку, получим приближенное значение по избытку с точностью до* $\frac{1}{10^n}$.

Пример. Рассмотрим число 3,5781..., его приближенные значения суть

по недостатку	по избытку	с точностью до
3	4	1
3,5	3,6	0,1
3,57	3,58	0,01
3,578	3,579	0,001
		и. т. д.

Теорема об аппроксимации. *Каким бы малым ни было задано положительное число* ε, *для любого иррационального числа* α *можно найти рациональные числа* r_1 *и* r_2, *между которыми содержится* α:

$$r_1 < \alpha < r_2$$

при условии, что разность $r_2 - r_1$ *меньше* ε:

$$r_2 - r_1 < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ — данное иррациональное число

$$\alpha = p_0,\ p_1 p_2 \ldots p_n \ldots .$$

Положим

$$r_1 = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}$$

и

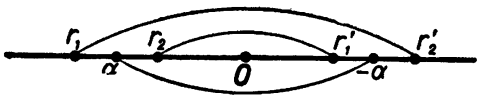
$$r_2 = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

тогда имеем:

$$r_2 < \alpha < r_1.$$

При достаточно большом n разность $r_2 - r_1$ может быть сделана меньшей любого наперед заданного числа ε (см. сноску на стр. 99):

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$



Черт. 18

Для отрицательного числа $-\alpha$ можно положить

$$r_1' = -r_2 \text{ и } r_2' = -r_1,$$

тогда

$$r_1' < -\alpha < r_2' \text{ и } r_2' - r_1' < \varepsilon \text{ (черт. 18), ч. т. д.}$$

§ 40. Плотность множества действительных чисел

Теорема. *Каковы бы ни были два различные действительные числа* $\alpha < \beta$, *существует бесконечное множество действительных чисел как рациональных, так и иррациональных, заключенных между* α *и* β.

Доказательство. Предположим сначала, что данные числа неотрицательны: $0 \leqslant \alpha < \beta$:

$$\alpha = p_0,\ p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$
$$\beta = q_0,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

(дроби с периодом 9 не употребляются в данном рассуждении). Сопоставим конечные десятичные дроби:

$$p_0;\ p_0, p_1;\quad p_0, p_1 p_2;\ \ldots$$
$$q_0;\ q_0, q_1;\quad q_0, q_1 q_2;\ \ldots$$

Так как $\alpha < \beta$, то в верхней последовательности найдется первое по порядку число $p_0,\ p_1 p_2\ \ldots\ p_k$, меньшее соответствующего числа нижней последовательности:

$$p_0,\ p_1 p_2\ \ldots\ p_{k-1} = q_0,\ q_1 q_2\ \ldots\ q_{k-1},\ \text{но}\ p_k < q_k$$

(не исключена возможность, что $p_0 < q_0$).
Построим десятичную дробь

$$\xi = p_0,\ p_1 p_2\ \ldots\ p_k l_{k+1} l_{k+2}\ \ldots,$$

сохранив в ней k первых знаков числа α. Каковы бы ни были последующие знаки $l_{k+1},\ l_{k+2}$, имеем $\xi < \beta$. Если $p_{k+1} \neq 9$, то возьмем в качестве l_{k+1} любое число, большее p_{k+1} (но, разумеется, не больше 9), тогда при произвольных последующих знаках l_{k+2}, l_{k+3} будем иметь $\alpha < \xi$. Если $p_{k+1} = 9$, но $p_{k+2} < 9$, тогда положим $l_{k+1} = 9$ и l_{k+2} равным любому числу большему p_{k+2}, а остальные знаки выберем произвольно. И так далее. Так как не все десятичные знаки $p_{k+1},\ p_{k+2},\ \ldots$ девятки, то всегда можно выбрать число ξ при условии $\alpha < \xi$. Следовательно, получим:

$$\alpha < \xi < \beta. \qquad (1)$$

Знаки $l_{k+1},\ l_{k+2},\ \ldots$, начиная с некоторого, можно выбирать произвольно, поэтому существует бесконечное множество чисел ξ, заключенных между α и β. Если эти знаки выбрать так, чтобы соответствующая дробь была периодической (в частности, конечной), тогда число ξ окажется рациональным; в противном случае число ξ будет иррациональным.

Итак, теорема доказана для неотрицательных чисел.

Если $\alpha < \beta \leqslant 0$, то $0 \leqslant -\beta < -\alpha$; по доказанному, существует бесконечное множество чисел ξ, заключенных между $-\beta$ и $-\alpha$:

$$-\beta < \xi < -\alpha;$$

число $-\xi$ заключено между α и β. Наконец, если $\alpha < 0 < \beta$, то между числами α и 0, равно как между 0 и β, содержится бесконечное множество чисел. Все эти числа заключены между α и β. Теорема доказана для всех возможных случаев.

Примеры: 1. $\alpha = 2{,}735\ldots$; $\beta = 4{,}01$. Любое из чисел 2,8; 2,81; 3,8039... больше α, но меньше β.

2. $\alpha = 0{,}713994\ldots$, $\beta = 0{,}714005\ldots$; число $\xi = 0{,}713995\ldots$ удовлетворяет условию $\alpha < \xi < \beta$.

3. $\alpha = 2{,}7301$, $\beta = 2{,}7415\ldots$.

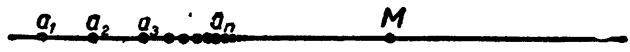
Непериодическая дробь $= 2{,}7301001000100001\ldots$ изображает иррациональное число, заключенное между α и β.

§ 41. Теоремы о возрастающих и убывающих последовательностях

Определение. *Если существует число M, большее любого члена данной возрастающей последовательности:*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, \qquad \{a_n\}$$

т. е. $a_n < M$ (при всех n), то последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной (черт. 19). *Если числа M большего любого числа по-*



Черт. 19.

следовательности $\{a_n\}$ не существует, то последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной.

Примеры: 1. Последовательность дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

ограничена: все члены этой последовательности меньше 1.

2. Последовательность десятичных приближений по недостатку с точностью до 1, до 0,1 до 0,01 и т. д. к данному иррациональному числу α ограничена: все члены этой последовательности меньше α.

3. Последовательность периметров правильных вписанных в данный круг многоугольников, при бесконечном удвоении числа сторон, ограничена, ибо периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра какого-нибудь описанного многоугольника (например, квадрата).

4. Последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ неограничена.

5. Последовательность квадратов натуральных чисел

$$1, 4, 9, \ldots n^2 \ldots,$$

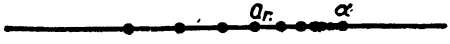
неограничена.

Теорема. *Для всякой возрастающей ограниченной последовательности:*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \qquad \{a_n\}$$

существует наименьшее действительное число, большее любого из ее членов (черт. 20).

Для определенности предположим, что все члены данной последовательности, начиная с некоторого значения n, положительны; для последовательностей с отрицательными членами рассуждения аналогичны.



Черт. 20.

Доказательство. Обозначим через $p+1$ наименьшее целое число, большее всех членов последовательности $\{a_n\}$. Таким образом, в последовательности содержатся числа, большие чем p, но нет чисел больших, чем $p+1$. Например, для последовательности $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots$ следует положить $p+1=1$ и $p=0$. Разделив промежуток от p до $p+1$ на 10 равных частей

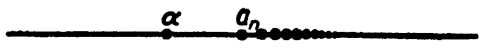
$$p,\ p+\frac{1}{10},\ p+\frac{2}{10}, \ldots,\ p+1, \qquad (1)$$

возьмем наименьшее из чисел (1), большее всех членов последовательности $\{a_n\}$; пусть это будет $p+\frac{q_1+1}{10}$. Тогда, в последовательности $\{a_n\}$ существуют числа, большие, чем $p+\frac{q_1}{10}$, но нет чисел больших $p+\frac{q_1+1}{10}$. Разделив промежуток от $p+\frac{q_1}{10}$ до $p+\frac{q_1+1}{10}$ на 10 равных частей, построим промежуток от $p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}$ до $p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100}$, обладающий аналогичным свойством. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим действительное число

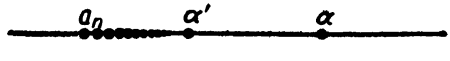
$$\alpha = p,\ q_1\ q_2\ \dots\ q_n\dots,$$

обладающее следующим свойством: *в последовательности $\{a_n\}$ существуют числа, большие любого десятичного приближенного значения α по недостатку, но любое приближенное значение α по избытку больше любого члена последовательности $\{a_n\}$*. Число α и является наименьшим действительным числом, большим всех членов последовательности $\{a_n\}$.

В самом деле: во-первых, α больше всех чисел последовательности, так как в противном случае в последовательности нашлись бы числа большие α (черт. 21): $\alpha < a_n$. Но тогда подходящим образом взятые десятичные приближения α по избытку также будут меньшими a_n, что невозможно;



Черт. 21.



Черт. 22.

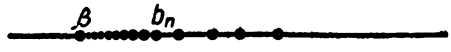
во-вторых, не существует числа α', меньшего α и большего всех членов последовательности $\{a_n\}$. Если бы такое число существовало, то любое приближенное значение по недостатку числа α большее, чем α', было бы больше всех членов последовательности $\{a_n\}$, что также невозможно (черт. 22), ч. т. д.

Определение. *Убывающая последовательность*

$$b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots \qquad \{b_n\}$$

называется ограниченной, если существует число N, меньшее любого ее члена: $N < b_n$ (черт. 23).

Черт. 23.



Черт. 24.

Теорема. *Для всякой убывающей ограниченной последовательности существует наибольшее действительное число, меньшее любого ее члена* (черт. 24).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема. *Для всякой последовательности стягивающихся рациональных сегментов:*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

существует единственное действительное число α, *удовлетворяющее неравенствам:*

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$$

при всех натуральных значениях n.

Доказательство. На основании предыдущих теорем существует наименьшее число α, большее любого члена последовательности

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \qquad \{a_n\}$$

и наибольшее число β, меньшее любого члена последовательности

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots \qquad \{b_n\}$$

Если окажется, что все числа a_n, начиная с некоторого n, равны $a_k = a_{k+1} = \ldots = \ldots$, то положим $\alpha = a_k$. В этом случае α есть общее число всех сегментов. Аналогичное замечание относится к последовательности $\{b_n\}$.

Черт. 25.

Покажем, что $\alpha = \beta$. Допустим, что $\alpha > \beta$, тогда может быть найдено действительное число ξ, промежуточное между α и β:

$$\beta < \xi < \alpha.$$

В силу свойств чисел α и β при достаточно больших значениях n члены последовательности $\{a_n\}$ будут бóльшими, а члены последовательности $\{b_n\}$ меньшими числами ξ, т. е.:

$$\beta \leqslant b_n < \xi < a_n \leqslant \alpha \qquad \text{(черт. 25)}.$$

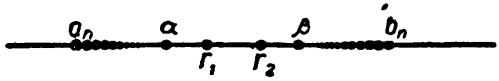
Но неравенство $b_n < a_n$ противоречит условию. Допустим теперь, что $\alpha < \beta$. Возьмем два какие-либо рациональные числа r_1 и r_2, заключенные между α и β; имеем:

$$\alpha < r_1 < r_2 < \beta,$$

следовательно, и подавно:

$$a_n < r_1 < r_2 < b_n,$$

откуда $b_n - a_n > r_2 - r_1$ (черт. 26), но это невозможно, так как разность $b_n - a_n$ при достаточно больших значениях n может быть сде-



Черт. 26.

Черт. 27.

лана как угодно малой. Таким образом, каждое предположение $\alpha > \beta$ и $\alpha < \beta$ приводит к противоречию. Следовательно, $\alpha = \beta$ есть единственное число, удовлетворяющее неравенствам $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ при всех значениях n (черт. 27), ч. т. д.

Таким образом, *всякая последовательность стягивающихся рациональных сегментов определяет единственное действительное число* α. *Числа* a_n *и* b_n *можно рассматривать как приближенные значения по недостатку и по избытку числа* α.

При изображении действительных чисел десятичными дробями используются частного вида приближенные значения в виде конечных десятичных дробей.

§ 42. Арифметические действия над действительными числами

Для удобства примем следующие обозначения. Если α — данное действительное число, то его десятичные приближенные значения по недостатку с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. до $\frac{1}{10^n}$... будем обозначать соответственно символами α_0^-, α_1^-, α_2^-, ..., α_n^-, ..., а приближенные значения по избытку — символами α_0^+, α_1^+, α_2^+, ..., α_n^+, ... Пусть, например, $\alpha = 3{,}1471\ldots$ Тогда

$$\alpha_0^- = 3,\quad \alpha_1^- = 3{,}1,\quad \alpha_2^- = 3{,}14,\quad \alpha_3^- = 3{,}147,$$
$$\alpha_0^+ = 4,\quad \alpha_1^+ = 3{,}2,\quad \alpha_2^+ = 3{,}15,\quad \alpha_3^+ = 3{,}148 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим сначала арифметические действия над положительными действительными числами.

Сложение. Пусть α и β — произвольные положительные действительные числа. Складывая соответственные приближенные значения по недостатку, получим возрастающую последовательность:

$$a_0 = \alpha_0^- + \beta_0^-,\quad a_1 = \alpha_1^- + \beta_1^-, \ldots, a_n = \alpha_n^- + \beta_n^-, \ldots.$$

Складывая соответственные приближенные значения чисел α и β по избытку, получим убывающую* последовательность:

$$b_0 = \alpha_0^+ + \beta_0^+,\quad b_1 = \alpha_1^+ + \beta_1^+, \ldots,\quad b_n = \alpha_n^+ + \beta_n^+, \ldots.$$

При любом n имеем:

$$a_n < b_n.$$

Разность $b_n - a_n$ при достаточно больших значениях n может быть сделана как угодно малой. В самом деле,

$$b_n - a_n = (\alpha_n^+ + \beta_n^+) - (\alpha_n^- + \beta_n^-) = (\alpha_n^+ - \alpha_n^-) + (\beta_n^+ - \beta_n^-).$$

Но каждая из разностей $\alpha_n^+ - \alpha_n^-$ и $\beta_n^+ - \beta_n^-$ при достаточно большом n может быть сделана как угодно малой. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое на-

* Точнее, последовательность $a_0, a_1, \ldots$ является неубывающей, так как в ней предшествующий член может оказаться равным последующему: $a_n \leqslant a_{n+1}$. Аналогично последовательность $b_0, b_1, \ldots$ является невозрастающей.

перед заданное как угодно малое рациональное число; взяв n настолько большим, чтобы $\alpha_n^+ - \alpha_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\beta_n^+ - \beta_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$, получим:

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

Поэтому:

$$[\alpha_0^- + \beta_0^-, \alpha_0^+ + \beta_0^+], [\alpha_1^- + \beta_1^-, \alpha_1^+ + \beta_1^+], \ldots, [\alpha_n^- + \beta_n^-, \alpha_n^+ + \beta_n^+], \ldots$$

есть последовательность стягивающихся рациональных сегментов, определяющая единственное действительное число γ. Итак, при любых действительных α и β существует единственное действительное число γ, большее всех сумм приближенных значений слагаемых по недостатку, но меньшее всех сумм приближенных значений слагаемых по избытку. В частном случае, когда числа α и β оба рациональные, этим свойством обладает сумма $\alpha + \beta$, а потому имеем $\gamma = \alpha + \beta$. Поэтому, естественно, и в случае когда хотя бы одно из чисел α и β иррационально, рассматривать число γ как сумму $\alpha + \beta$.

Определение. *Суммой двух положительных действительных чисел называется действительное число, большее всех сумм приближенных значений слагаемых по недостатку, но меньшее всех сумм приближенных значений слагаемых по избытку.*

Пример. Положим, $\alpha = 3{,}3121\ldots$, $\beta = 2{,}5483\ldots$, складываем приближенные значения по недостатку:

$\alpha_0^- = 3$	$\beta_0^- = 2$	$\alpha_0^- + \beta_0^- = 5$
$\alpha_1^- = 3{,}3$	$\beta_1^- = 2{,}5$	$\alpha_1^- + \beta_1^- = 5{,}8$
$\alpha_2^- = 3{,}31$	$\beta_2^- = 2{,}54$	$\alpha_2^- + \beta_2^- = 5{,}85$
$\alpha_3^- = 3{,}312$	$\beta_3^- = 2{,}548$	$\alpha_3^- + \beta_3^- = 5{,}860$
$\alpha_4^- = 3{,}3121$	$\beta_4^- = 2{,}5483$	$\alpha_4^- + \beta_4^- = 5{,}8604$

. . . . . .

складываем приближенные значения по избытку:

$\alpha_0^+ = 4$	$\beta_0^+ = 3$	$\alpha_0^+ + \beta_0^+ = 7$
$\alpha_1^+ = 3{,}4$	$\beta_1^+ = 2{,}6$	$\alpha_1^+ + \beta_1^+ = 6{,}0$
$\alpha_2^+ = 3{,}32$	$\beta_2^+ = 2{,}55$	$\alpha_2^+ + \beta_2^+ = 5{,}87$
$\alpha_3^+ = 3{,}313$	$\beta_3^+ = 2{,}549$	$\alpha_3^+ + \beta_3^+ = 5{,}862$
$\alpha_4^+ = 3{,}3122$	$\beta_4^+ = 2{,}5484$	$\alpha_4^+ + \beta_4^+ = 5{,}8606$

. . . . . .

Таким образом, последовательно определяются десятичные знаки суммы

$$\alpha + \beta = 5{,}860\ldots.$$

Обратимся к конкретному смыслу сложения действительных чисел. Пусть AB и CD отрезки, длины которых выражаются числами α и β. Для определенности возьмем те же числа, что в разобранном примере. Рассмотрим какие-нибудь приближенные значения чисел α и β с дан-

ной степенью точности. Возьмем, например, α_2^-, β_2^-, α_2^+ и β_2^+. Отрезок AB содержит полных 331 сотую доли единичного отрезка, однако, 332 сотых доли E составляют отрезок, больший AB. Аналогично отрезок CD содержит 254 полных сотых долей E, но 255 сотых долей образуют отрезок, больший CD. Отрезок $MN = AB + CD$ содержит $100(\alpha_2^- + \beta_2^-) = 585$ полных сотых долей E, но $100(\alpha_2^+ + \beta_2^+) = 587$ сотых долей E составляют отрезок, больший E. Итак

$$\alpha_2^- + \beta_2^- < MN < \alpha_2^+ + \beta_2^+.$$

Аналогично при любом n найдем:

$$\alpha_n^- + \beta_n^- < MN < \alpha_n^+ + \beta_n^+.$$

Единственное число, удовлетворяющее последним неравенствам, есть сумма $\alpha + \beta$, поэтому длина отрезка-суммы выражается суммой чисел, измеряющих отрезки-слагаемые.

Покажем, что сложение положительных действительных чисел обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. В самом деле, сумма $\alpha + \beta$ определяется последовательностями сумм $\alpha_n^- + \beta_n^-$ и $\alpha_n^+ + \beta_n^+$, сумма $\beta + \alpha$ определяется последовательностями $\beta_n^- + \alpha_n^-$ и $\beta_n^+ + \alpha_n^+$. В силу свойства коммутативности сложения рациональных чисел имеем:

$$\alpha_n^- + \beta_n^- = \beta_n^- + \alpha_n^- \quad \text{и} \quad \alpha_n^+ + \beta_n^+ = \beta_n^+ + \alpha_n^+;$$

следовательно,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Аналогично устанавливается справедливость закона ассоциативности сложения. Сумма $(\alpha + \beta) + \gamma$ определяется последовательностью стягивающихся сегментов:

$$[(\alpha_n^- + \beta_n^-) + \gamma_n^-,\ (\alpha_n^+ + \beta_n^+) + \gamma_n^+],$$

а сумма $\alpha + (\beta + \gamma)$ определяется последовательностью:

$$[\alpha_n^- + (\beta_n^- + \gamma_n^-),\ \alpha_n^+ + (\beta_n^+ + \gamma_n^+)].$$

В силу закона ассоциативности сложения рациональных чисел обе последовательности тождественны, а потому:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Умножение. ***Определение.*** *Произведением двух положительных действительных чисел α и β называется действительное число, большее всех произведений соответственных приближенных значений сомножителей по недостатку, но меньшее всех произведений приближенных значений сомножителей по избытку.*

Теорема. *Умножение однозначно выполнимо при произвольных данных положительных действительных числах α и β.*

Доказательство. Надо доказать, что существует единственное действительное число γ, при всех значениях n удовлетворяющее неравенствам:

$$\alpha_n^- \beta_n^- < \gamma < \alpha_n^+ \beta_n^+.$$

1° Последовательность произведений $\alpha_0^- \beta_0^-$, $\alpha_1^- \beta_1^-, \ldots, \alpha_n^- \beta_n^-, \ldots$ возрастает, а последовательность $\alpha_0^+ \beta_0^+$, $\alpha_1^+ \beta_1^+, \ldots, \alpha_n^+ \beta_n^+, \ldots$ убывает.

2° При любом n имеем:

$$\alpha_n^- \beta_n^- < \alpha_n^+ \beta_n^+.$$

3° Разность $\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^-$ при достаточно больших значениях n может быть сделана как угодно малой; имеем:

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- = (\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^+ \beta_n^-) + (\alpha_n^+ \beta_n^- - \alpha_n^- \beta_n^-) = \\ = \alpha_n^+ (\beta_n^+ - \beta_n^-) + \beta_n^- (\alpha_n^+ - \alpha_n^-).$$

Пусть M любое число, большее наибольшего из чисел α_0^+ и β_0^+, тогда получим неравенство:

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- < M [(\beta_n^+ - \beta_n^-) + (\alpha_n^+ - \alpha_n^-)].$$

Отсюда ясно, что разность $\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^-$ может быть сделана как угодно малой. В самом деле, рассмотрим любое наперед заданное (как угодно малое) рациональное число $\varepsilon > 0$ и выберем n настолько большим, чтобы выполнялись неравенства:

$$\beta_n^+ - \beta_n^- < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{и} \quad \alpha_n^+ - \alpha_n^- < \frac{\varepsilon}{2M},$$

тогда будем иметь:

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- < \varepsilon.$$

Последовательность

$$[\alpha_0^- \beta_0^-, \ \alpha_0^+ \beta_0^+], \ [\alpha_1^- \beta_1^-, \ \alpha_1^+ \beta_1^+] \ldots$$

есть последовательность стягивающихся рациональных сегментов, определяющая единственное число $\gamma = \alpha\beta$, ч. т. д.

Пример. Положим,

$$\alpha = 1{,}7320\ldots; \quad \beta = 1{,}4142\ldots;$$

имеем

$\alpha_0^- = 1$	$\beta_0^- = 1$	$\alpha_0^- \beta_0^- = 1$
$\alpha_1^- = 1{,}7$	$\beta_1^- = 1{,}4$	$\alpha_1^- \beta_1^- = 2{,}38$
$\alpha_2^- = 1{,}73$	$\beta_2^- = 1{,}41$	$\alpha_2^- \beta_2^- = 2{,}4393$
$\alpha_3^- = 1{,}732$	$\beta_3^- = 1{,}414$	$\alpha_3^- \beta_3^- = 2{,}449048$
$\alpha_4^- = 1{,}7320$	$\beta_4^- = 1{,}4142$	$\alpha_4^- \beta_4^- = 2{,}44939440$
. . . . .		

Аналогично:

$$\alpha_0^+ = 2 \qquad \beta_0^+ = 2 \qquad \alpha_0^+\beta_0^+ = 4$$
$$\alpha_1^+ = 1{,}8 \qquad \beta_1^+ = 1{,}5 \qquad \alpha_1^+\beta_1^+ = 2{,}70$$
$$\alpha_2^+ = 1{,}74 \qquad \beta_2^+ = 1{,}42 \qquad \alpha_2^+\beta_2^+ = 2{,}4708$$
$$\alpha_3^+ = 1{,}733 \qquad \beta_3^+ = 1{,}415 \qquad \alpha_3^+\beta_3^+ = 2{,}452195$$
$$\alpha_4^+ = 1{,}7321 \qquad \beta_4^+ = 1{,}4143 \qquad \alpha_4^+\beta_4^+ = 2{,}44970903$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, последовательно определяются десятичные знаки произведения

$$\alpha\beta = 2{,}449\ldots$$

Не представляет затруднений непосредственно показать (см. соответствующие рассуждения для сложения), что умножение положительных действительных чисел обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Вычитание. Пусть $\alpha > \beta$ два положительные действительные числа.

Определение. *Разностью $\alpha - \beta$ называется число x, удовлетворяющее условию: $\alpha = \beta + x$.*

Вычитая из приближенных значений по избытку числа α соответственные приближенные значения по недостатку числа β, получим убывающую последовательность:

$$\alpha_n^+ - \beta_n^- \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Аналогично вычитая из приближенных значений по недостатку числа α приближенные значения по избытку числа β, получим возрастающую последовательность $\alpha_n^- - \beta_n^+$ *.

Можно показать (предоставляем это учащимся), что эти две последовательности определяют последовательность стягивающихся сегментов. Число x, определяемое этой последовательностью, и есть искомая разность $\alpha - \beta$. В самом деле, сумма $\beta + x$ есть число, определяемое последовательностью стягивающихся сегментов:

$$[\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+),\ \ \beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-)], \qquad (1)$$

но

$$\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+) = \alpha_n^- - (\beta_n^+ - \beta_n^-) < \alpha_n^-$$

и

$$\beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-) = \alpha_n^+ + (\beta_n^+ - \beta_n^-) > \alpha_n^+.$$

Так как разность $\beta_n^+ - \beta_n^-$ может быть при достаточно большом n сделана как угодно малой, то последовательности стягивающихся сегментов (1) и $[\alpha_n^-,\ \alpha_n^+]$ определяют одно и то же число α:

$$\beta + x = \alpha.$$

---

* Если несколько первых разностей $\alpha_n^- - \beta_n^+$ получатся отрицательными, то их можно не принимать во внимание.

Легко показать, что не существует никакого другого действительного числа, удовлетворяющего условию $\alpha = \beta + x$. В самом деле, допустим, что существуют два различные действительные числа x и y такие, что $\alpha = \beta + x$ и $\alpha = \beta + y$. Предположим для определенности что $x > y$. Имеем $\beta + x = \beta + y$. Следовательно (в силу определений сложения),

$$\beta_n^- + x_n^- < \beta_n^+ + y_n^+,$$

откуда:

$$x_n^- - y_n^+ < \beta_n^+ - \beta_n^-.$$

Так как $x > y$, то при всех достаточно больших n разность $x_n^- - y_n^+$ возрастает, а потому будет большей некоторого числа k, но тогда $k < \beta_n^+ - \beta_n^-$, а следовательно, разность $\beta_n^+ - \beta_n^-$ не может быть сделана как угодно малой (противоречие).

Примечание. Из условия $\alpha > \beta$ следует, что $x = \alpha - \beta > 0$. В самом деле, приближенные значения x по недостатку $\alpha_n^- - \beta_n^+$ положительны, так как при $\alpha > \beta$ имеем $\alpha_n^- > \beta_n^+$ для всех достаточно больших n.

Пример: Положим:

$$\alpha = 2{,}434\ldots,\ \beta = 2{,}122\ldots,$$

имеем:

$$\alpha_0^- = 2; \quad \alpha_1^- = 2{,}4; \quad \alpha_2^- = 2{,}43; \quad \alpha_3^- = 2{,}434\ldots$$

$$\beta_0^+ = 3; \quad \beta_1^+ = 2{,}2; \quad \beta_2^+ = 2{,}13; \quad \beta_3^+ = 2{,}123\ldots$$

Составляем приближенные значения разности по недостатку

$$\alpha_0^- - \beta_0^+ = -1, \quad \alpha_1^- - \beta_1^+ = 0{,}2, \quad \alpha_2^- - \beta_2^+ = 0{,}30, \quad \alpha_3^- - \beta_3^+ = 0{,}311\ldots.$$

Приближенное значение $\alpha_0^- - \beta_0^+$, как отрицательное число, можно не рассматривать. Аналогично вычисляются приближенные значения разности по избытку:

$$\alpha_0^+ - \beta_0^- = 1, \quad \alpha_1^+ - \beta_1^- = 0{,}4, \quad \alpha_2^+ - \beta_2^- = 0{,}32, \quad \alpha_3^+ - \beta_3^- = 0{,}313\ldots.$$

Таким образом, шаг за шагом определяются десятичные знаки разности

$$\alpha - \beta = 0{,}31\ldots.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости свойств вычитания, известных из арифметики.

Деление. Пусть α — положительное действительное число. Возьмем какое-нибудь положительное рациональное число k, мень-

щее α*. Составим две числовые последовательности:

$$\frac{1}{a_n^+} \text{ и } \frac{1}{a_n^-}, \tag{2}$$

где число n взято с тем расчетом, чтобы число a_n^- было отличным от нуля **.

Покажем, что *последовательности* (2) *определяют последовательность стягивающихся сегментов.*

Доказательство.

1° $\frac{1}{a_n^+} < \frac{1}{a_n^-}$, так как $a_n^- < a_n^+$.

2° $\frac{1}{a_n^-}$ убывает, так как a_n^- возрастает. Аналогично $\frac{1}{a_n^+}$ возрастает.

3° Разность $\frac{1}{a_n^-} - \frac{1}{a_n^+}$ может быть сделана как угодно малой. В самом деле, при достаточно большом n имеем $k < a_n^- < a_n^+$, а потому:

$$\frac{1}{a_n^-} - \frac{1}{a_n^+} = \frac{a_n^+ - a_n^-}{a_n^- a_n^+} < \frac{a_n^+ - a_n^-}{k^2}.$$

Но при достаточно большом n числитель последней дроби может быть сделан как угодно малым, а знаменатель остается неизменным. При достаточно больших значениях n будем иметь $a_n^+ - a_n^- < k^2\varepsilon$, но тогда $\frac{1}{a_n^-} - \frac{1}{a_n^+} < \varepsilon$, ч. т. д.

Определение. *Действительное число, определяемое последовательностью стягивающихся сегментов* $\left[\frac{1}{a_n^+}, \frac{1}{a_n^-}\right]$, *называется обратным числом по отношению к* α *и обозначается символом* $\frac{1}{\alpha}$.

Покажем, что $\alpha \frac{1}{\alpha} = 1$. В самом деле, составим произведения приближенных значений чисел α и $\frac{1}{\alpha}$, получим:

$$a_n^- \frac{1}{a_n^+} < 1 < a_n^+ \frac{1}{a_n^-}, \text{ откуда } \alpha \frac{1}{\alpha} = 1.$$

---

* Если, например, $\alpha = 0{,}000105\ldots$, то достаточно взять $k = 0{,}00001$. Вообще если q_k первый десятичный знак α числа, отличный от нуля, то можно взять $k = \frac{1}{10^{k+1}}$.

** Например, если $\alpha = 0{,}023\ldots$, то $a_0^- = a_1^- = 0$, поэтому следует рассматривать последовательности (2), начиная с $n = 2$

$\frac{1}{a_2^+} = \frac{1}{0{,}03}$, $\frac{1}{a_3^+} = \frac{1}{0{,}024}$ и т. д.; $\frac{1}{a_2^-} = \frac{1}{0{,}02}$, $\frac{1}{a_3^-} = \frac{1}{0{,}023}$ и т. д.

Определение. *Частным* $\frac{\alpha}{\beta}$ *называется число* x, *удовлетворяющее условию* $\alpha = \beta x$.

Умножая на $\frac{1}{\beta}$ находим единственно возможное значение x:

$$x = \alpha \frac{1}{\beta}.$$

Проверкой убеждаемся, что

$$\beta x = \beta\alpha\frac{1}{\beta} = \alpha\beta\frac{1}{\beta} = \alpha.$$

Таким образом, деление есть операция всегда выполнимая в множестве положительных действительных чисел.

Арифметические действия в множестве всех действительных чисел.

Условимся над положительными и отрицательными действительными числами и нулем производить арифметические действия по тем же правилам, которые были установлены (гл. I, § 4) *применительно к рациональным числам.* В силу этого соглашения будем иметь:

$$\alpha + (-\beta) = \begin{cases} \alpha - \beta & (\text{если } \alpha > \beta), \\ -(\beta - \alpha) & (\text{если } \alpha < \beta), \\ 0 & (\text{если } \alpha = \beta), \end{cases}$$

$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$, $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$, $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha 0 = 0$, и т. д.

Нет надобности проверять справедливость законов арифметических действий в множестве всех действительных чисел. В самом деле, доказательство справедливости законов действий в множестве всех рациональных чисел основывается:

1° *на наличии этих законов в множестве положительных чисел,*

2° *на правилах действий над положительными, отрицательными числами и нулем.*

Так как законы действий сохраняются в множестве всех положительных действительных чисел, а правила арифметических операций над положительными, отрицательными числами и нулем остаются прежними, то законы действий сохраняются в множестве всех действительных чисел.

§ 43. Множество действительных чисел как числовое поле

Множество всех действительных чисел можно рассматривать как числовое поле, так как:

1° *в нем выполнимы четыре арифметические действия (кроме деления на нуль);*

2° *имеют место законы действий: коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения.*

Поле действительных чисел содержит как часть поле рациональных чисел.

Отметим следующие основные свойства чисел 0 и 1 в поле действительных чисел. При любом действительном α справедливы равенства $\alpha+0=\alpha$, $\alpha\cdot 0=0$, $\alpha\cdot 1=\alpha$. Если произведение $\alpha\beta$ равно нулю, то по крайней мере один из сомножителей равен нулю. В самом деле, если $\alpha\neq 0$, то, умножив обе части равенства $\alpha\beta=0$ на $\frac{1}{\alpha}$, получим:

$$\alpha\,\frac{1}{\alpha}\beta=0\cdot\frac{1}{\alpha},\ \text{откуда}\ \beta\cdot 1=\beta=0,$$

Поле действительных чисел является расположенным числовым полем, так как:

1° *любые два действительные числа связаны одним из соотношений „больше", „меньше", „равно";*

2° *имеют место законы скалярного расположения* (§ 3 и § 38).

Скалярные свойства действий, имеющие место в поле рациональных чисел (см. гл. I, § 7), остаются в силе в поле действительных чисел. В § 7 были указаны следующие основные скалярные свойства действий: разность $a-b$ положительна, если $a>b$, отрицательна, если $a<b$, равна нулю, если $a=b$, и законы монотонности сложения и умножения. Все рассуждения § 7, относящиеся к рациональным числам, остаются в силе применительно к произвольным действительным числам.

В поле действительных чисел сегментом $[a, b]$ называется множество всех действительных чисел x, заключенных между a и b, включая сами эти числа:

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

Понятие последовательности стягивающихся сегментов (см. определение на стр. 97) без изменения применимо к сегментам в поле действительных чисел.

Отметим следующие основные свойства поля действительных чисел.

I. *В поле действительных чисел выполняется* ***аксиома Архимеда:*** *при любых действительных положительных α и β существует натуральное число n такое, что*

$$n\alpha>\beta.$$

Доказательство. Выберем два положительные рациональные числа A и B при условии $A<\alpha$ и $\beta<B$. В силу аксиомы Архимеда, в поле рациональных чисел существует такое натуральное число n, что $nA>B$, но так как $n\alpha>nA$ (монотонность умножения) и $\beta<B$, то $n\alpha>\beta$, ч. т. д.

II. *Поле действительных чисел обладает свойством плотности.*

Доказательство дано в § 40.

III. *Поле действительных чисел обладает свойством непрерывности;*

Если две последовательности действительных чисел:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \text{ и } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots \quad (1)$$

определяют последовательность стягивающихся сегментов:

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n], \ldots, \quad (2)$$

то существует единственное действительное число ξ, принадлежащее всем сегментам (2): т. е. $\alpha_n \leqslant \xi \leqslant \beta_n$ (при любом n).

В § 41 это утверждение было доказано в частном случае, когда члены возрастающей и убывающей последовательностей являются рациональными числами. Однако рассуждения без всяких изменений применимы и в том случае, когда числа α_n и β_n являются действительными числами*.

Наличием свойства непрерывности поле действительных чисел существенным образом отличается от поля рациональных чисел.

Примечание. Принцип стягивающихся сегментов (непрерывность) имеет значительные применения в элементарной математике. Так, например, последовательность периметров правильных вписанных в окружность многоугольников возрастает, а последовательность периметров соответственных описанных многоугольников убывает при неограниченном удвоении числа сторон. Разность между периметрами соответствующих описанного и вписанного многоугольников может быть сделана как угодно малой при достаточно больших значениях n, следовательно существует единственное действительное число, большее всех периметров вписанных многоугольников, но меньшее периметров описанных многоугольников. Это число называется длиной окружности.

Аналогично принцип стягивающихся сегментов применяется к нахождению поверхностей и объемов тел вращения.

Поле действительных чисел не может быть подвергнуто дальнейшему расширению так, чтобы остались в силе законы действий, свойства скалярного расположения, скалярные свойства действий и аксиома Архимеда. К множеству действительных чисел невозможно присоединить никаких „новых чисел", чтобы расширенное числовое множество продолжало оставаться архимедовым, т. е. удовлетворяющим всем перечисленным условиям, числовым полем. В этом смысле множество действительных чисел называется максимальным архимедовым числовым полем.

Доказательство методом от противного. Допустим, что в результате пополнения множества действительных чисел образовалось архимедово числовое поле. Рассмотрим одно из вновь присоединенных „чисел" Ω;

* Провести доказательство в § 41 для случая стягивающихся сегментов с любыми действительными концами было невозможно лишь потому, что условие 3° требует, чтобы разность $\beta_n - \alpha_n$ могла быть сделана при достаточно большом n как угодно малой. Но действие вычитания еще не было определено (§ 41) в множестве действительных чисел.

можно считать $\Omega > 0$ (т. к. если $\Omega < 0$, то можно рассматривать число $0 - \Omega$). В силу аксиомы Архимеда, при достаточно большом n получим $1+1+\ldots+1=n>\Omega$. Обозначим через $p+1$ наименьшее натуральное число, большее Ω:

$$p < \Omega < p+1.$$

Далее будем поступать так же, как при десятичном измерении отрезков: разделив промежуток $[p, p+1]$ на 10 равных частей, определим число q_1 при условии

$$p+\frac{q_1}{10} < \Omega < p+\frac{q_1+1}{10}.$$

Неограниченное продолжение этого процесса определит действительное число:

$$\alpha = p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

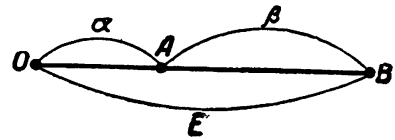
В силу построения числа α, при всех значениях n имеем $\alpha_n^- < \Omega < \alpha_n^+$ и одновременно $\alpha_n^- \leqslant \alpha \leqslant \alpha_n^+$. По условию $\alpha \neq \Omega$; для определенности положим $\alpha < \Omega$, тогда при всех значениях n:

$$\Omega - \alpha < \alpha_n^+ - \alpha_n^- = \frac{1}{10^n}, \text{ откуда } 10^n(\Omega - \alpha) < 1$$

при всех значениях n, что несовместимо с аксиомой Архимеда.

Следовательно, $\Omega = \alpha$, т. е. Ω не может быть „новым числом", ч. т. д.

Иррациональные числа не образуют числового поля, это видно хотя бы потому, что всякое числовое поле должно содержать все рациональные числа. Ясно и непосредственно, что действия сложения и умножения не всегда выполнимы в множестве иррациональных чисел. Так, например, сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом. Возьмем какое-нибудь иррациональное число в виде непериодической десятичной дроби, например,



Черт. 28.

$$\alpha = 0{,}235971\ldots \tag{3}$$

Построим действительное число β, дополнив десятичные знаки числа α до 9:

$$\beta = 0{,}764028\ldots \tag{4}$$

Число β иррациональное; так как если бы дробь (4) была периодической, то дробь (3) также была бы периодической; имеем:

$$\alpha + \beta = 0{,}999\ldots = 1.$$

Геометрический смысл построенного примера ясен из чертежа 28: отрезок AB длиной β дополняет до E данный отрезок OA длиной α, несоизмеримый с единичным отрезком E.

§ 44. Извлечение корня

Определение. *Арифметическим корнем степени n из положительного числа a называется положительное число x, n-я степень которого равна a:*

$$x^n = a.$$

Арифметический корень степени n обозначается символом $\sqrt[n]{a}$.

В множестве рациональных чисел действие извлечения корня не всегда выполнимо; так, например, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt{16}=4$, но $\sqrt{2}$ не существует, ибо нет рационального числа, квадрат которого равен числу 2 (стр. 94).

Теорема. *Каково бы ни было положительное действительное число a, существует единственное положительное действительное число x, n-я степень которого равна a.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность n-х степеней целых неотрицательных чисел

$$0,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots \qquad (1)$$

Пусть $N>0$ — любое заданное (как угодно большое) число. Покажем, что при всех достаточно больших значениях k имеет место неравенство $k^n>N$.

В самом деле, пусть k любое натуральное число, большее 1 и большее N:

$$1<k \text{ и } N<k.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получим $N<k^2$. Перемножая почленно последнее неравенство и $1<k$, получим $N<k^3$ и т. д., и наконец $N<k^n$.

В частности, в последовательности (1) существуют числа большие a. Обозначим через $p+1$ наименьшее из этих чисел:

$$p^n \leqslant a < (p+1)^n.$$

Разделим сегмент $[p,\ p+1]$ на десять равных частей: p, $p+\frac{1}{10}$, $p+\frac{2}{10}$, $\ldots$, $p+1$. Пусть $p+\frac{q_1+1}{10}$ наименьшее из этих чисел, n-я степень которого больше a; имеем:

$$\left(p+\frac{q_1}{10}\right)^n \leqslant a < \left(p+\frac{q_1+1}{10}\right)^n.$$

Далее делим вновь полученный сегмент на 10 равных частей и так далее неограниченно. В результате мы получим действительное число x, определяемое десятичной дробью:

$$x = p,\ q_1 q_2\ \ldots\ q_m \ldots$$

Его приближенные значения по недостатку и по избытку

$$x_m^- = p,\ q_1 q_2 \ldots q_m \text{ и } x_m^+ = p,\ q_1 q_2 \ldots (q_m+1) \qquad (2)$$

обладают следующим свойством:

$$(x_m^-)^n \leqslant a < (x_m^+)^n. \tag{3}$$

По правилу умножения действительных чисел, x^n есть единственное действительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$(x_m^-)^n \leqslant x^n \leqslant (x_m^+)^n. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим $x^n = a$, т. е. $x = \sqrt[n]{a}$. Никакого другого положительного числа y, n-я степень которого равна a, не существует. В самом деле, если $y < x$, то $y^n < x^n$ (монотонность умножения), т. е. $y^n < a$, если же $y > x$, то $y^n > a$, ч. т. д.

Числа x_m^- и x_m^+ являются приближенными значениями корня с точностью до $\frac{1}{10^m}$ по недостатку и по избытку.

Правило последовательного вычисления приближенных значений квадратного корня подробно излагается в школьном курсе алгебры. Для корней произвольной степени можно руководствоваться следующими указаниями. Приближенное значение корня с точностью до 1 находится непосредственно (или с помощью таблиц). Чтобы найти приближенные значения $\sqrt[n]{a}$ с точностью до $\frac{1}{10^m}$, извлекаем с точностью до 1 корень из числа $a10^{mn}$ и результат делим на 10^m. В самом деле, пусть

$$p^n \leqslant a\ 10^{mn} < (p+1)^n,$$

тогда

$$\frac{p^n}{10^{mn}} \leqslant a < \frac{(p+1)^n}{10^{mn}} \quad \text{и} \quad \frac{p}{10^m} \leqslant \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{10^m}.$$

Пример. Найти $\sqrt{2{,}5}$ с точностью до 0,1, здесь

$$a = 2{,}5, \quad n = 2, \quad m = 1, \quad 2{,}5 \cdot 100 = 250$$

и

$$15^2 < 250 < 16^2$$

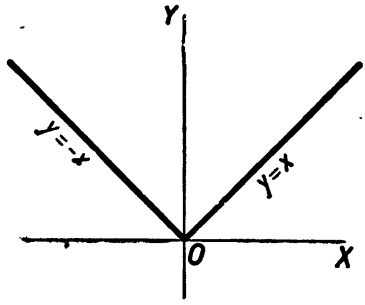
искомые приближенные значения суть 1,5 и 1,6.

В поле действительных чисел действие извлечения корня не всегда выполнимо. В самом деле, четная степень любого действительного числа не может быть отрицательным числом. Поэтому операция извлечения корня четной степени из отрицательных чисел в поле действительных чисел невыполнима.

Если A — данное положительное число, то существуют два различные действительные числа, четная степень которых равна A, именно два противоположные действительные числа $\sqrt[2k]{A}$ и $-\sqrt[2k]{A}$ имеют одну и ту же $2k$-ю степень, равную A.

Извлечение корня нечетной степени в множестве действительных чисел всегда выполнимо единственным образом, так как нечетная степень отрицательного числа отрицательна. При $A > 0$

условию $x^{2k+1}=A$ удовлетворяет единственное положительное число $x=\sqrt[2k+1]{A}$, а условию $x^{2k+1}=-A$ — единственное отрицательное число $x=-\sqrt[2k+1]{A}$.



$y=|x|$

Черт. 29.

Равенство

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (5)$$

справедливо при любом $a\geqslant 0$.

В множестве всех действительных чисел равенство (5) не является тождеством. Так, например, $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$, но не -2. Вообще

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{|x|^2}=|x|$$

или

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (\text{если } x\geqslant 0)\\ -x & (\text{если } x<0).\end{cases}$$

На чертеже 29 представлен график функции $y=x$ и $y=\sqrt{x^2}=|x|$.

Примеры: 1. Рассмотрим выражение $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{a^2}}{a}=\frac{|a|}{a}=\begin{cases} 1 \text{ (если } a>0)\\ -1 \text{ (если } a<0)\\ \text{не имеет смысла при } a=0.\end{cases}$$

2. Рассмотрим выражение $x+\sqrt{(x-1)^2}$; имеем: $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$, если $x\geqslant 1$ и $\sqrt{(x-1)^2}=-x+1$, если $x<1$. Следовательно,

$$x+\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases} 2x-1 & (\text{если } x\geqslant 1),\\ 1 & (\text{если } x<1).\end{cases}$$

§ 45. Примеры промежуточных полей

Можно показать, что существует бесконечное множество числовых полей, содержащих как часть поле рациональных чисел и содержащихся в поле действительных чисел. Эти поля будем называть промежуточными числовыми полями. Убедимся на примере в существовании промежуточных полей. Присоединим к множеству рациональных чисел какое-нибудь иррациональное число α. Одного лишь присоединения α недостаточно, чтобы получить числовое поле. В поле должны быть выполнимы арифметические действия (кроме деления на нуль), поэтому кроме α придется присоединить числа, получающиеся в результате выполнения всевозможных арифметических операций над α и над рациональными числами.

Для примера положим $\alpha=\sqrt{k}$, где k любое положительное рациональное число, не являющееся квадратом никакого рациональ-

ного числа. Присоединив $a=\sqrt{k}$, мы должны присоединить всевозможные произведения вида:

$$\ldots -\sqrt{k},\ -2\sqrt{k},\ \ldots,\ 2\sqrt{k},\ 3\sqrt{k},\ \ldots,\ \frac{1}{2}\sqrt{k}$$ и вообще $b\sqrt{k}$,

где b — любое рациональное число. Далее, мы должны присоединить всевозможные суммы $a+b\sqrt{k}$, произведения

$$(a+b\sqrt{k})(a_1+b_1\sqrt{k})\ ,$$

(где a, b, a_1, b_1 — любые рациональные числа)

и частные $\dfrac{a+b\sqrt{k}}{a_1+b_1\sqrt{k}}$ (где a_1 и b_1 не равны оба нулю).

Теорема. *Множество всевозможных чисел вида $a+b\sqrt{k}$, где a и b — произвольные рациональные числа, а $k>0$ — данное рациональное число, не являющееся квадратом рационального числа, образует поле.*

Доказательство. Надо показать, что сумма, разность, произведение и частное двух чисел данного вида суть числа того же вида. В самом деле,

$$1^\circ\ (a+b\sqrt{k})\pm(a_1+b_1\sqrt{k})=(a\pm a_1)+(b\pm b_1)\sqrt{k}$$

$$2^\circ\ (a+b\sqrt{k})(a_1+b_1\sqrt{k})=aa_1+bb_1k+(a_1b+ab_1)\sqrt{k}$$

$$3^\circ\ \frac{a+b\sqrt{k}}{a_1+b_1\sqrt{k}}=\frac{(a+b\sqrt{k})(a_1-b_1\sqrt{k})}{(a_1+b_1\sqrt{k})(a_1-b_1\sqrt{k})}=\frac{aa_1-bb_1k}{a_1^2-b_1^2k}+\frac{ba_1-ab_1}{a_1^2-b_1^2k}\sqrt{k}\ *.$$

Положим, например, $k=2$, тогда, в частности, получится поле чисел вида $a+b\sqrt{2}$. Это поле является промежуточным между полем рациональных и полем действительных чисел. Поле рациональных чисел содержится в поле чисел вида $a+b\sqrt{2}$, ибо при $b=0$ число $a+b\sqrt{2}$ рационально. Построенное поле содержит не все действительные числа. Так, например, в этом поле не содержится число $\sqrt{3}$. В самом деле, в противном случае имело бы место равенство:

$$a+b\sqrt{2}=\sqrt{3}.$$

Возводя в квадрат, получим:

$$a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2=3,$$

---

* Знаменатель $a_1^2-b_1^2k$ отличен от нуля, ибо в противном случае число k было бы квадратом рационального числа:

$$a_1^2-b_1^2k=0,\quad \text{откуда}\quad k=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2.$$

откуда найдем $\sqrt{2}$ в виде рационального числа

$$\sqrt{2}=\frac{3-a^2-2b^2}{2ab},$$

что невозможно.

Придавая k различные значения, можно получить бесконечное множество промежуточных полей чисел вида $a+b\sqrt{k}$. Этими полями не исчерпываются все возможные промежуточные поля.

§ 46. Многочлены, рациональные функции и линейные уравнения с действительными коэффициентами

В главе II мы изучали многочлены и дробные выражения над полем рациональных чисел, считая, что входящие в них числа (обозначенные буквами или цифрами) являются рациональными. Однако эти же математические выражения можно рассматривать над полем действительных чисел, считая для их коэффициентов и аргументов допустимыми произвольные действительные, а не только рациональные, значения. Определения понятий рационального выражения и многочлена (см. § 9) остаются прежними, только теперь допустимыми значениями для букв следует считать действительные числовые значения. Так, для многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

над полем действительных чисел, коэффициенты суть данные действительные (безразлично рациональные или иррациональные) числа, а для аргумента x допустимы произвольные действительные значения.

Выполнение действий над многочленами (над полем рациональных чисел, см. гл. II) сводится к выполнению в известной последовательности четырех арифметических действий над их коэффициентами. Таким образом, построенная в гл. II теория многочленов над полем рациональных чисел была основана лишь на возможности выполнения над коэффициентами четырех арифметических действий (кроме деления на 0). Иначе говоря, существенным является лишь то, что *коэффициенты многочленов являются элементами числового поля*. Поэтому изложенная в гл. II теория многочленов над полем рациональных чисел может быть распространена на многочлены, над полем действительных чисел. При этом нет надобности для многочленов с произвольными действительными коэффициентами заново излагать всю теорию, ибо над действительными числами, как и над рациональными, возможно выполнять четыре арифметические действия. Теорема о тождественности двух многочленов, действия над многочленами, деление многочленов с остатком, понятия делимости и неприводимого многочлена, теоремы о корнях, алгоритм Эвклида и разложение на неприводимые множители — все эти основные понятия и предложения с вытекающими из них следствиями остаются в силе для многочленов, над полем действительных чисел (или над каким-нибудь другим числовым полем).

Примечание. Разумеется, что способ отыскания рациональных корней многочлена, основывающийся на теории делимости целых чисел, не может быть распространен на многочлены с произвольными действительными коэффициентами.

Можно рассматривать также рациональные дроби как отношения многочленов с действительными коэффициентами и распространить на них все сказанное в § 22 о дробных выражениях с рациональными коэффициентами. Наконец, решение и исследование систем линейных уравнений также основано на возможности выполнения над коэффициентами и свободными членами уравнений четырех арифметических действий. Поэтому все сказанное выше о системах уравнений 1-й степени с рациональными коэффициентами без изменения переносится на системы уравнений с произвольными действительными коэффициентами (или вообще с коэффициентами, принадлежащими некоторому числовому полю).

Переход от поля рациональных к полю действительных чисел позволит изучать более обширный класс математических выражений и изображаемых ими элементарных функций. Так, например, выражение $\sqrt{A}$ имеет в поле рациональных чисел смысл лишь при условии, что подкоренное выражение A является квадратом рационального числа, тогда как выражение $\sqrt{A}$ в поле действительных чисел имеет смысл при произвольном неотрицательном значении A.

Ниже мы не будем повторять изложение теории многочленов и дробных рациональных функций (что было бы совершенно излишним), а ограничимся лишь некоторыми к ней дополнениями.

§ 47. Корни многочлена в поле действительных чисел

Всякий многочлен n-й степени с действительными коэффициентами

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

не может иметь больше, чем n действительных корней (см. § 15). Всякий многочлен, имеющий хотя бы один действительный корень, является приводимым над полем действительных чисел. В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$.

В качестве примера рассмотрим квадратный трехчлен

$$ax^2+bx+c$$

с действительными коэффициентами. Вынесем за скобки коэффициент a и применим преобразование выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (\text{где } \Delta=b^2-4ac).$$

Корнями трехчлена являются те значения x, при которых

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \tag{1}$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2}$$

Возможны следующие случаи:

1° $\Delta>0$. Из последнего равенства получим

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3}$$

и

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Таким образом, существуют два различные действительные корня трехчлена. Трехчлен является приводимым, и

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

есть его разложение на неприводимые множители.

2° $\Delta<0$. Равенство (1), а следовательно, и (2) не могут иметь место ни при каком действительном x, ибо ни при каком x квадрат действительного числа $x+\frac{b}{2a}$ не может быть отрицательным. Переход к равенству (3) невозможен, ибо (в поле действительных чисел) при $\Delta<0$ выражение $\sqrt{\Delta}$ не имеет смысла. Поэтому трехчлен не имеет действительных корней. Покажем, что при $\Delta<0$ трехчлен неприводим над полем действительных чисел. В самом деле, нетривиальными делителями квадратного трехчлена могут быть двучлены первой степени. Если бы трехчлен был приводим, то имело бы место разложение

$$ax^2+bx+c=(kx+l)(mx+n).$$

Но тогда, вопреки предположению, трехчлен имел бы два действительные корня: $x_1=-\frac{l}{k}$ и $x_2=-\frac{n}{m}$.

3° $\Delta=0$. В этом случае

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

следовательно, трехчлен имеет действительный корень $x_1=-\frac{b}{2a}$, называющийся двукратным корнем.

Следствие. *Условием неприводимости квадратного трехчлена над полем действительных чисел является неравенство* $\Delta<0$.

Всякий многочлен с рациональными коэффициентами можно рассматривать над полем действительных чисел, считая для его аргументов допустимыми произвольные действительные (а не только рациональные) значения. Всякий многочлен, приводимый над полем рациональных чисел, является приводимым и над полем дей-

ствительных чисел, так как его делители с рациональными коэффициентами в то же время являются делителями с действительными коэффициентами. Обратное неверно,— многочлен, неприводимый над полем рациональных чисел, может оказаться приводимым над полем действительных чисел.

Всякий рациональный корень многочлена является в то же время его действительным корнем. Однако многочлен с рациональными коэффициентами может иметь иррациональные корни. Таким образом, при расширении множества допустимых значений аргумента число корней многочлена может лишь увеличиться.

Примеры: 1. Многочлен x^2-2 имеет два действительные корня $x=\pm\sqrt{2}$ и разлагается на неприводимые множители с действительными коэффициентами следующим образом:

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}). \tag{4}$$

Этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел, так как разложение (4) есть единственно возможное (с точностью до числовых множителей), а потому никакое другое разложение, в частности разложение с рациональными коэффициентами, невозможно.

2. Рассмотрим трехчлен ax^2+bx+c с рациональными коэффициентами. Если $\Delta>0$, то этот многочлен приводим над полем действительных чисел и разлагается на два множителя 1-й степени:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Этот трехчлен приводим над полем рациональных чисел, если корни $x_1,\ x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ рациональны, т. е. если дискриминант Δ является точным квадратом некоторого рационального числа.

3. Многочлен $x^4+1>0$ при всех действительных x, а потому он не имеет действительных корней и не может делиться ни на какой двучлен 1-й степени. Следовательно, многочлен x^4+1 либо неприводим, либо разлагается на два неприводимые множителя 2-й степени. Над полем действительных чисел данный многочлен приводим:

$$\begin{aligned}x^4+1&=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=\\&=[(x^2+1)+\sqrt{2}x][(x^2+1)-\sqrt{2}x]=\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел, так как последнее разложение (единственно возможное) содержит множители с иррациональными коэффициентами. Данный многочлен приводим над промежуточным полем чисел вида $a+b\sqrt{2}$ (см. § 45).

4. Многочлен x^3+x^2-3x-3 над полем рациональных чисел разлагается на неприводимые множители так:

$$x^3+x^2-3x-3=(x+1)(x^2-3).$$

Над полем действительных чисел второй множитель является приводимым, и разложение может быть продолжено:

$$x^3+x^2-3x-3=(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

5. По формулам сокращенного умножения имеем:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\quad\text{и}\quad x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Квадратный трехчлен $x^2\pm x+1$ не имеет действительных корней ($\Delta=-3<0$), а потому дальнейшее разложение на множители невозможно ни над полем рациональных, ни над полем действительных чисел.

§ 48. Радикалы и действия над ними

Согласно § 44 при любом неотрицательном числе a и натуральном n существует единственное неотрицательное число $x=\sqrt[n]{a}$ (арифметический корень), n-я степень которого равна a.

Равенство степеней $A^n=B^n$ при неотрицательных основаниях A и B имеет место лишь в случае, когда равны основания A и B. В самом деле, при $A>B\geqslant 0$ имеем $A^n>B^n$ (монотонность умножения), а при $0\leqslant A<B$ имеем $A^n<B^n$ и, следовательно, $A^n\neq B^n$ при $A\neq B$. Это позволяет доказать ряд свойств извлечения корня путем непосредственной проверки:

чтобы установить справедливость равенства $A=B$ при неотрицательных A и B, достаточно доказать справедливость равенства $A^n=B^n$, полученного возведением обеих частей доказываемого соотношения в n-ю степень.

Нижеследующие правила действий и преобразований имеют место для арифметических корней, т. е. в предположении, что подкоренные выражения и значения корней суть неотрицательные числа.

1° ***Правило извлечения корня из произведения:***

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_k}=\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\dots\sqrt[n]{a_k}.$$

Корень из произведения равен произведению корней той же степени из каждого сомножителя.

Доказательство проверкой. Возводим обе части в n-ю степень

$$\left(\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_k}\right)^n=a_1a_2\dots a_k \text{ (по определению корня)}$$

$$\left(\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\dots\sqrt[n]{a_k}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a_1}\right)^n\left(\sqrt[n]{a_2}\right)^n\dots\left(\sqrt[n]{a_k}\right)^n=a_1a_2\dots a_k$$

(по правилу возведения в степень произведения).

2° ***Правило извлечения корня из дроби*** (словесную формулировку предоставляем учащимся):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Доказательство проверкой.

3° ***Правило сокращения показателя степени и показателя корня:***

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}.$$

Доказательство проверкой: возведем обе части в степень nk:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k=a^k.$$

(по правилу возведения степени в степень)

$$\left(\sqrt[nk]{a^k}\right)^{nk}=a^k \text{ (по определению корня).}$$

4° ***Правило извлечения корня из корня:***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

Доказательство проверкой:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right]^{k}=\left[\sqrt[k]{a}\right]^{k}=a.$$

Следствия из правил 1° и 4°:

5° ***Правило извлечения корня из степени:***

$$\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

Доказательство. Полагаем в 1° $a_1=a_2=\ldots=a_k=a$.

6° ***Правило вынесения множителя за знак радикала:***

$$\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}. \qquad (5)$$

Доказательство:

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}\ \text{(правило 1°)}.$$

7° ***Правило введения множителя под знак радикала:***

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.$$

Достаточно переписать равенство (5) в другом порядке.

8° ***Правило приведения радикалов к общему показателю.*** Пусть n общее кратное показателей данных радикалов

$$\sqrt[n_1]{A_1},\ \sqrt[n_2]{A_2},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{A_k}.$$

Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_k$ соответствующие дополнительные множители:

$$n=n_1d_1,\quad n=n_2d_2,\ \ldots,\ n=n_kd_k.$$

Воспользовавшись правилом 3°, можно заменить данные радикалы соответственно равными радикалами с общим показателем корня:

$$\sqrt[n_1]{A_1}=\sqrt[n]{A_1^{d_1}},\quad \sqrt[n_2]{A_2}=\sqrt[n]{A_2^{d_2}},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{A_k}=\sqrt[n]{A_k^{d_k}}.$$

Пример. Какое из чисел $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$ является бо́льшим? Приведем радикалы к общему показателю:

$$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8};\quad \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9};$$

следовательно,

$$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}.$$

Правила действий над радикалами 1°—8° могут оказаться несправедливыми, если не все входящие в формулы числа положительны. Так например, при $a<0$, $b<0$ формула

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$$

не имеет места. В самом деле, выражение $\sqrt{ab}$ имеет смысл, так как $ab>0$, но правая часть не имеет смысла в поле действительных чисел, так как каждый из множителей $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ теряет смысл.

§ 49. Иррациональные выражения

Определение. *Выражение, составленное из чисел (обозначенных буквами или цифрами) при помощи алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня), называется алгебраическим выражением.*

Данное алгебраическое выражение будем называть выражением, содержащим радикалы, если оно содержит символы (один или несколько) извлечения корня.

Алгебраические выражения, содержащие действие извлечения корня из выражений, в которые входят буквы-аргументы, называются иррациональными относительно данных аргументов.

Примечание. Мы рассматриваем алгебраические выражения по внешнему виду. Не исключена возможность, что иррациональное выражение окажется тождественным некоторому рациональному выражению. Так, например, выражение $\sqrt{(x^2+1)^2}-1$, данное в иррациональном виде, тождественно рациональному выражению x^2.

Примерами числовых и буквенных выражений, содержащих радикалы, могут служить:

$$1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},\quad \sqrt[3]{a+\sqrt{b}},\quad \sqrt{a^2-\sqrt[3]{ab}}+\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Функция, определяемая иррациональным выражением, называется иррациональной, если ее закон соответствия не может быть представлен при помощи рационального выражения. Тождественные преобразования выражений, содержащих радикалы, выполняются на основании общих законов действий над произведениями и многочленными выражениями и правил действий над радикалами.

Примеры простейших преобразований.

1. Преобразовать $S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$, где a, b, c и $d>0$.

Решение:

$$S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3d\,(a^4c^2)^2}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{3d\,(2a^3c^3)^2}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{(a^2c)^2}}$$

(по свойствам умножения)

$$=\frac{1}{a^2c}a^4c^2\sqrt{3d}+\frac{2}{ac^2}\cdot 2a^3c^3\sqrt{3d}-a^4c^2\frac{1}{a^2c}\sqrt{3d}$$

(правила 6° и 2°)

$$=a^2c\sqrt{3d}+4a^2c\sqrt{3d}-a^2c\sqrt{3d}=(a^2c+4a^2c-a^2c)\sqrt{3d}$$

(дистрибутивность)

$$=4a^2c\sqrt{3d}.$$

2. Преобразовать $\left(\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}\right):\left(\frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}\right)=$

$=\left(\frac{24a^5b^2}{d^2}\,b\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}}\right):\left(\frac{4a^2}{b}\frac{ab^2}{d}\sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right)$ (правило 6°)

$=\frac{6a^2b^2}{d}\left(\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}}:\sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right)$ (свойства умножения и деления)

$=\frac{6a^2b^2}{d}\left(\sqrt[15]{\left(\frac{a^2b^2}{c^2}\right)^8}:\sqrt[15]{\left(\frac{ab}{cd^2}\right)^5}\right)$ (правило 8°)

$=\frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{a^6b^6\cdot c^5d^{10}}{c^6a^5b^5}}$ (правило 2°)

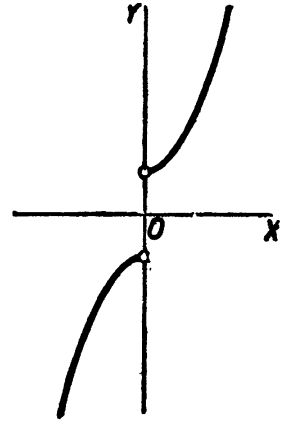
$=\frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{abd^{10}}{c}}=\frac{6a^2b^2}{cd}\sqrt[15]{abd^{10}c^{14}}.$

Примечание. В последнем примере рассматриваются лишь корни нечетной степени, поэтому преобразование верно при всех (положительных и отрицательных), отличных от нуля, значениях букв.

3. Преобразовать

$$S=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}},$$

где x — любое действительное число отличное от нуля.



Черт. 30.

Решение:

$$S=\frac{2x}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}=$$

$=\frac{2x\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{4x^2}}$ (правило 2°)

$=\frac{x}{|x|}(1+x^2)=\begin{cases}1+x^2 \text{ (если } x>0)\\ -(1+x^2) \text{ (если } x<0)\end{cases}$ (черт. 30).

4. Преобразовать $Q=\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

при $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, где $a>0$, $b>0$.

Решение. Вычисляем

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-1}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)-1}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}.$$

Производя подстановку, получим

$$Q=\frac{2b\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}=\frac{2b|a-b|}{(a+b)-|a-b|}.$$

Но

$$|a-b|=\begin{cases} a-b & (\text{при } a\geqslant b)\\ b-a & (\text{при } a<b),\end{cases}$$

поэтому

$$Q=\begin{cases} a-b & (\text{при } a\geqslant b)\\ \frac{b}{a}(b-a) & (\text{при } a<b).\end{cases}$$

Пусть дано некоторое выражение S, содержащее радикалы; будем называть сопряженным множителем другое иррациональное выражение M, не равное тождественно нулю, такое, что произведение SM есть выражение, не содержащее радикалов.

Например, для выражения $\sqrt[4]{a^3b^2}$ (где $a>0$ и $b>0$) можно в качестве сопряженного множителя взять $M=\sqrt[4]{ab^2}$, так как

$$\sqrt[4]{a^3b^2}\ \sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^4b^4}=ab.$$

Отметим простейшие случаи нахождения сопряженных множителей.

1. Для $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ в качестве сопряженного множителя можно взять $M=\sqrt{A}-\sqrt{B}$, так как

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=(\sqrt{A})^2-(\sqrt{B})^2=A-B.$$

2. Для $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ можно положить $M=\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

3. Для $\sqrt[k]{A}-\sqrt[k]{B}$ сопряженный множитель определяется на основании тождества:

$$x^k-y^k=(x-y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+x^{k-3}y^2+\ldots+y^{k-1}).$$

Полагая $x=\sqrt[k]{A}$, $y=\sqrt[k]{B}$ и

$$M=\sqrt[k]{A^{k-1}}+\sqrt[k]{A^{k-2}B}+\sqrt[k]{A^{k-3}B^2}+\ldots+\sqrt[k]{B^{k-1}},$$

получим:

$$(\sqrt[k]{A}-\sqrt[k]{B})M=A-B.$$

В частности для $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ следует положить:

$$M=\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$$

4. Для $\sqrt[k]{A}+\sqrt[k]{B}$ сопряженный множитель находится на основании тождества:

$$x^k\pm y^k=(x+y)(x^{k-1}-x^{k-2}y+\ldots\pm y^{k-1})$$

(знак $+$ при k нечетном, $-$ при k четном). Так, например, для $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ следует положить $M=\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$.

В ряде случаев отыскание сопряженного множителя удается выполнить последовательно. Рассмотрим, например, выражение:

$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$; умножив его на $M_1=\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$, получим:

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2-C=$$
$$=A+B-C+2\sqrt{AB}.$$

Умножив полученное произведение на $M_2=A+B-C-2\sqrt{AB}$, получим в произведении рациональное выражение:

$$(A+B-C)^2-4AB.$$

Следовательно, можно положить:

$$M=M_1M_2=(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})(A+B-C-2\sqrt{AB}).$$

Отыскание сопряженных множителей применяется при преобразовании дробных выражений, содержащих радикалы. Так, например, умножая числитель и знаменатель на множитель, сопряженный знаменателю (или числителю), получим выражение, не содержащее радикалов в знаменателе (или в числителе).

Примеры. 1. Освободить от радикалов знаменатель

$$\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}.$$

Решение

$$\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{(a-\sqrt[n]{b})(a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})}=$$
$$=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}.$$

2. Перенести радикалы из числителя в знаменатель

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}{a-1}=\frac{a-\sqrt[3]{a^2}}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2})}=$$
$$=\frac{(a-\sqrt[3]{a^2})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4})}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4})}=$$
$$=\frac{a^3-a^2}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{a})}=$$
$$=\frac{a}{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}.$$

3. Освободить знаменатель дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ от радикалов.

Р е ш е н и е. Воспользуемся тождеством (см. стр. 64)

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Положим $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$.
Умножив числитель и знаменатель на

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac},$$

получим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Для окончательного освобождения знаменателя от радикалов следует умножить числитель и знаменатель на

$$(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Отметим следующую формулу, употребляющуюся при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \qquad (1)$$

где $A>0$, $B>0$ и $A^2>B$, а знаки берутся либо верхние, либо нижние.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$. Возводя в квадрат, получим:

$$x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}, \text{ откуда } x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}},$$

следовательно,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (2)$$

Аналогично найдем:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

складывая и вычитая, получим формулу (1).

Примеры. 1. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; положим $A=4\sqrt{2}$, $B=24$, получим

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt{4\sqrt{2}+\sqrt{24}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32-24}}{2}}+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{32-24}}{2}}=$$

$$=\sqrt{3\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}.$$

2. Преобразовать $S=\sqrt{x^2+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x^2-2\sqrt{x-1}}$, где $x\geqslant 1$. Положив в формуле (2) $A=x$, $B=4(x-1)$, получим

$$\sqrt{A^2-B}=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|.$$

Но

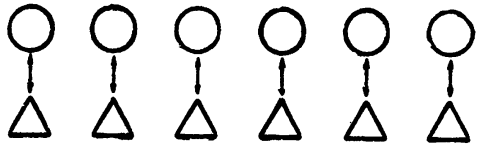
$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (\text{если } x\geqslant 2)\\ 2-x & (\text{если } x<2).\end{cases}$$

Откуда

$$S=2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}=\begin{cases}2\sqrt{x-1} & (\text{если } x\geqslant 2)\\ 2 & (\text{если } x<2).\end{cases}$$

§ 50. Счетные множества

Если два конечные множества имеют одно и то же количество элементов, то это означает, что элементы данных множеств могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие (стр. 103). Такое соответствие установлено, например, на чертеже 31 между множествами кружков и треугольников. Процесс счёта есть приведение во взаимно однозначное соответствие элементов данного множества и чисел натурального ряда: *Если данное множество содержит n предметов, то их можно привести во взаимно однозначное соответствие (занумеровать) с множеством n первых чисел натурального ряда* 1, 2, 3, ... (черт. 32).



Черт. 31.

Черт. 32.

Понятие взаимно однозначного соответствия позволяет сравнивать между собой не только конечные, но и бесконечные множества. Рассмотрим, например, множества натуральных и четных положительных чисел. Удвоив каждое натуральное число, подпишем под ним соответствующее четное число:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5, \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10, \ldots, & 2n, & \ldots \end{array} \qquad \text{(I)}$$

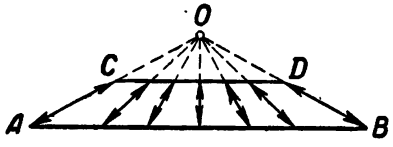
Этот способ объединения элементов данных множеств в пары устанавливает взаимно однозначное соответствие между натуральными и четными числами. Однако мы не получим взаимно однозначного соответствия, если будем объединять в пары числа данных множеств следующим способом

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots & 2n & 2n+1 & \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & \updownarrow & \\ 2 & & 4 & & 6 & \ldots\ldots\ldots & & 2n+2 & \ldots \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Схема (I) показывает, что взаимно однозначное соответствие оказалось установленным между всем множеством (натуральные числа) и его частью (четные числа). Такого положения вещей не может быть для конечных множеств. Если два конечные множества содержат одинаковое количество предметов, то всегда получается взаимно однозначное соответствие, каким бы способом предметы ни объединялись в пары взаимно соответственных элементов.

Для конечного множества невозможно установить взаимно однозначное соответствие между всем множеством и его частью. Это свойство есть характеристическое свойство конечных множеств, отличающее их от множеств бесконечных.

Определение. *Два множества называются эквивалентными (или равномощными), если между их элементами возможно (хотя бы одним способом) установить взаимно однозначное соответствие.*



Черт. 33.

Говорят, что эквивалентные множества содержат „одинаковое количество" элементов. Так, например, четных чисел „столько же", сколько и натуральных чисел. Черт. 33 показывает, что между точками двух отрезков AB и CD может быть установлено взаимно однозначное соответствие, значит, отрезок CD содержит „столько же" точек, сколько и AB, хотя CD по длине меньше, чем AB. Простейшим бесконечным множеством является множество всех натуральных чисел.

Определение. *Всякое множество, эквивалентное множеству чисел натурального ряда, называется счетным множеством.*

Так, например, множество четных чисел счетно.

Для характеристики равномощных бесконечных множеств можно вводить специальные символы и рассматривать их как новые числа. Эти числа называются количественными трансфинитными числами. Счетному множеству принято в качестве его количественной характеристики относить символ (трансфинитное число) $\aleph_0$*. Таким образом, можно сказать, что количество натуральных чисел есть $\aleph_0$, количество четных чисел есть также $\aleph_0$.

Теорема. *Если к счетному множеству присоединить конечное множество элементов, то получится счетное множество.*

Доказательство. Присоединим например, к счетному множеству $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ два новые элемента A_1 и A_2. Элементы получившегося множества можно занумеровать, например, так:

A_1, A_2, a_1, a_2, a_3, ...
№ 1, № 2, № 3, № 4, № 5, ... ч. т. д.

Символически это можно записать следующим равенством:

$$2 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

---

* $\aleph$ „алеф" — первая буква еврейского алфавита.

Теорема. *Если соединить в одно множество элементы двух счетных множеств, то получится счетное множество.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ элементы данных множеств, элементы множества-суммы можно занумеровать, например, так:

a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 ...
№ 1 № 2 № 3 № 4 № 5 № 6 ...

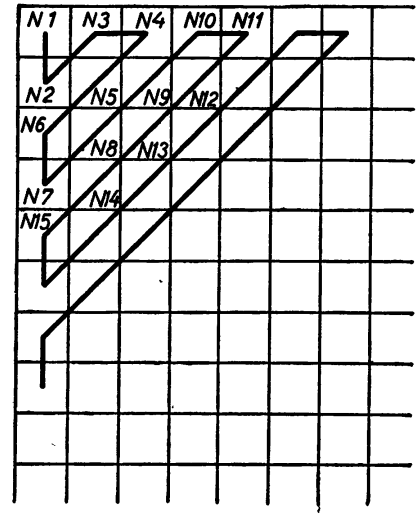
ч. т. д.

Символически это можно записать так:

$$\aleph_0 + \aleph^0 = \aleph_0.$$

Теорема. *Если элементы счетного множества повторить счетное число раз, то получится счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим таблицу, в которой содержится счетное число строк, а в каждой строке — счетное число квадратов. Все квадраты можно занумеровать при помощи «диагональной» схемы (черт. 34), ч. т. д.



Черт. 34. Диагональная схема.

	1	2	3	4	5	6	
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	• • •
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	• • •
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	• • •
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	• • •
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	• • •
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	• • •
	•	•	•	•	•	•	
	•	•	•	•	•	•	
	•	•	•	•	•	•	

Черт. 34а. Таблица.

Символически это можно записать так:

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Числовые соотношения трансфинитной арифметики во многом не похожи на соответствующие соотношения обычной арифметики, оперирующей конечными числами. Источником этого расхождения является возможность установить взаимно однозначное соответствие между всем бесконечным множеством и его частью.

Теорема. *Множество всех рациональных чисел является счетным.*

Доказательство. В самом деле, расположив все положительные числа в таблицу (черт. 34а), можно занумеровать все положительные рациональные числа при помощи диагональной схемы. При этом из нумерации всякий раз можно исключать те числа, которые были уже ранее занумерованы $\left(\text{например, } \frac{2}{4} \text{ и } \frac{4}{8}\right)$. Присоединяя к счетному

множеству положительных рациональных чисел нуль и отрицательные рациональные числа, мы получим опять счетное множество, которое содержит все рациональные числа, ч. т. д.

§ 51. Несчетность множества всех действительных чисел

Теорема. *Все действительные числа не могут быть занумерованы, каким бы способом ни производилась нумерация.*

Доказательство. Будем рассматривать множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1. Допустим, что все десятичные дроби, изображающие эти числа, каким-либо способом оказались занумерованными:

$$\begin{aligned}
&№\ 1 \quad 0,p_1^{(1)}p_2^{(1)}p_3^{(1)}\ \ldots\ p_n^{(1)}\ \ldots = a_1\\
&№\ 2 \quad 0,p_1^{(2)}p_2^{(2)}p_3^{(2)}\ \ldots\ p_n^{(2)}\ \ldots = a_2\\
&№\ 3 \quad 0,p_1^{(3)}p_2^{(3)}p_3^{(3)}\ \ldots\ p_n^{(3)}\ \ldots = a_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Рассмотрим число

$$\beta = 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots .$$

Десятичные знаки β выберем при соблюдении следующих условий: $a_1 \neq p_1^{(1)}$ и $a_1 \neq 9$, $a_2 \neq p_2^{(2)}$ и $a_2 \neq 9, \ldots, a_n \neq p_n^{(n)}$ и $a_n \neq 9$ и т. д., а в остальном произвольно *.

Покажем, что β не равно ни одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ В самом деле, $\beta \neq a_1$, так как эти числа отличаются первыми десятичными знаками; $\beta \neq a_2$, так как эти числа отличаются вторыми десятичными знаками, вообще $\beta \neq a_n$, так как эти числа отличаются n-ми десятичными знаками.

Таким образом, вопреки предположению, не все действительные числа интервала (0,1) оказались занумерованными, ибо число β неравное ни одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, наверное, не входиг в нумерацию, ч. т. д.

Следствие. *Множество всех действительных чисел не является счетным.*

Множества эквивалентные множеству всех действительных чисел называются множествами мощности континуума (т. е. непрерывности). Множество всех действительных чисел носит название арифметического континуума. В качестве символа мощности континуума вводится особое трансфинитное число $\aleph$. Счетное множество натуральных чисел есть часть множества всех действительных чисел, поэтому мощность континуума следует рассматривать как мощность, более высокую по сравнению со счетной, а потому число $\aleph$ считается большим числа $\aleph_0$:

$$\aleph > \aleph_0$$

Геометрическим примером множества мощности континуума может служить множество всех точек прямой линии.

* Девятки не употребляются во избежание дробей с периодом 9.

Глава V

ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 52. Основные понятия и определения

Не всякое уравнение степени выше 1-й имеет в поле действительных чисел решение. Одной из причин этого является невыполнимость действия извлечения корня четной степени из отрицательных чисел. Так, например, уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных корней, ибо не существует действительного числа, квадрат которого равен числу -1. Поставим следующий вопрос: нельзя ли расширить поле действительных чисел таким образом, чтобы в образовавшемся поле было выполнимо действие извлечения корня?

Допустим, что такое расширение возможно, тогда в расширенном поле должно содержаться число (хотя бы одно), квадрат которого равен -1 (выполнимость извлечения квадратного корня). Обозначим это число через i:

$$i^2=-1.$$

Во всяком поле должны быть однозначно выполнимы сложение и умножение, подчиняющиеся основным законам действий. По условию, в расширенном поле содержатся все действительные числа, следовательно, в нем должны содержаться все произведения bi (b — действительное число), а также все суммы вида $a+bi$. Действия сложения и умножения должны выполняться по обычным правилам (с заменой всюду i^2 на -1):

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i;$$
$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+ab_1i+a_1bi+bb_1i^2=$$
$$=(aa_1-bb_1)+(ab_1+a_1b)i.$$

Эти рассуждения носят условный характер, они показывают, какими свойствами должно обладать расширенное числовое поле *в предположении, что оно может быть построено.* Однако возможность построения такого поля должна быть обоснована. Введение новых чисел и установление действий над ними осуществляется посредством определений, и нашей задачей является показать, что при надлежащих определениях множество действительных чисел можно расширить и получить числовое поле, в котором всякое алгебраическое уравнение имеет решение (хотя бы одно).

Определения: 1° *Произвольная пара действительных чисел a и b, заданных в определенном порядке, определяет новый объект, который будем обозначать символом $a+bi$ и называть комплексным числом.*

2° *Комплексные числа $a+bi$ и a_1+b_1i условимся считать равными: $a+bi=a_1+b_1i$, если $a=a_1$ и $b=b_1$.*

3° *Комплексное число вида $a+0i$ условимся считать равным действительному числу a.*

4° *Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и a_1+b_1i называется комплексное число $(a+a_1)+(b+b_1)i$.*

5° *Произведением двух комплексных чисел называется комплексное число* $aa_1 - bb_1 + (ab_1 + a_1b)\,i$.

Если комплексное число не равно действительному ($b \neq 0$), то будем называть его мнимым числом.

Комплексное число вида $0 + bi$, где $b \neq 0$ называется чисто мнимым числом и обычно записывается так: bi; число $0 + 1i = i$ называется мнимой единицей.

В силу 3° всякому действительному числу a соответствует „равное" комплексное число $a + 0i$ и обратно — всякому комплексному числу вида $a + 0i$ соответствует „равное" действительное число a^*. Рассмотрим ближе это взаимно однозначное соответствие. Возьмем два комплексные числа $a_1 + 0i$ и $a_2 + 0i$. Вычислим их сумму и произведение по правилам 4° и 5°:

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i$$
$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) = (a_1a_2 - 0) + (a_10 + a_20)\,i = a_1a_2 + 0i.$$

Мы видим, что сумме (или произведению) данных комплексных чисел соответствует действительное число, „равное" сумме (или произведению) соответствующих действительных чисел.

Итак, соответствие между множеством комплексных чисел вида $a + 0i$ и множеством действительных чисел таково, что оно сохраняется при выполнении основных действий сложения и умножения, а именно: если выполнить действие над числами одного множества и над соответственными числами другого множества, то получатся (в обоих множествах) соответственные числа. *Взаимно-однозначное соответствие, которое сохраняется при выполнении действий, называется в современной алгебре изоморфизмом.*

Таким образом, соответствие между действительными числами и комплексными числами вида $a + 0i$ есть изоморфизм. Изоморфные системы арифметически неотличимы друг от друга, ибо в обеих системах действия над соответствующими числами приводят к соответственным результатам. Это позволяет отождествить число вида $a + 0i$ с действительным числом a и рассматривать всякое действительное число как частный случай комплексного.

С изоморфными системами мы встречались выше. Рассматривая действительное число как десятичную дробь, мы можем выделить дроби, являющиеся конечными или периодическими. Выделенная часть множества всех действительных чисел изоморфна множеству всех рациональных чисел.

Приведем пример взаимно однозначного соответствия, не являющегося изоморфизмом. Установим между натуральными и четными числами взаимно однозначное соответствие при помощи схемы

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

* Мы пишем слово равный в кавычках, желая подчеркнуть, что действительное число a и комплексное число $a + 0i$ первоначально не отождествляются. Возможность их отождествления обосновывается последующим текстом.

Возьмем сумму двух натуральных чисел $m+n$, заменив каждое слагаемое соответственными числами $2m$ и $2n$, получим число $2m+2n=2(m+n)$, соответствующее сумме $m+n$. Теперь возьмем произведение mn. Заменив каждый сомножитель соответственным числом, получим число $(2m)(2n)=4mn$, не являющееся соответственным произведению mn. В самом деле, числу mn соответствует $2mn$, а не $4mn$.

В определении 1° символ $a+bi$ не рассматривается как сумма чисел a и bi, ибо смысл действий устанавливается лишь в последующих определениях. Легко убедиться на основании определений 3°, 4° и 5°, что число $a+bi$ возможно рассматривать как сумму действительного числа a и произведения чисел b и i. В самом деле, число a равно $a+0i$, число b равно $b+0i$. Произведение чисел b и i равно $(b+0i)(0+i)=0+bi$. Сумма числа a и произведения bi равна

$$(a+0i)+(0+bi)=a+bi.$$

Следствие. Квадрат числа i равен -1:

$$i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=(0-1)+(0\cdot 1+1\cdot 0)i=-1.$$

Теорема. *Для сложения и умножения комплексных чисел остаются в силе основные законы действий.*

Доказательство заключается в непосредственной прозерке. Проверим, например, справедливость закона дистрибутивности умножения относительно сложения. Пусть

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,\quad z_3=a_3+b_3i;$$

имеем:

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3)&=(a_1+b_1i)[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]=\\ &=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+[a_1(b_2+b_3)+(a_2+a_3)b_1]i=\\ &=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_3b_1)i \end{aligned}$$

(преобразования выполняются на основе законов действий над действительными числами).

Аналогично

$$\begin{aligned} z_1z_2+z_1z_3&=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=\\ &=[a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i]+[a_1a_3-b_1b_3+(a_1b_3+a_3b_1)i]=\\ &=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1)i, \end{aligned}$$

откуда:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Проверку справедливости прочих законов предоставляем учащимся.

Определения: *1° Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z=a+bi$.*

2° Число bi называется мнимой частью числа z, число b — коэффициентом при мнимой части z.

3° Числа $a+bi$ и $a-bi$, имеющие одинаковую действительную часть и противоположные по знаку коэффициенты при мнимой части, называются сопряженными.

Число, сопряженное числу $z=a+bi$, обозначается символом

$$\overline{z}=a-bi.$$

Пример.

$$a)\ z=3+i, \qquad \overline{z}=3-i,$$
$$b)\ z=-2-4i, \qquad \overline{z}=-2+4i.$$

Всякое действительное число сопряжено самому себе, так как $a=a+0i=a-0i=\overline{a}$. Обратно, всякое самосопряженное число является действительным. В самом деле, если $z=x+iy=x-iy=\overline{z}$, то $y=-y$, откуда $y=0$, т. е. $z=x$.

Теорема. *Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел действительны.*

Доказательство. Имеем:

$$z+\overline{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x$$

и

$$z\overline{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2,$$

ч. т. д.

Покажем, что в множестве комплексных чисел выполнимы действия, обратные сложению и умножению.

Вычитание. Пусть $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ — данные комплексные числа. Разность z_1-z_2, по определению, есть число $z=x+yi$, удовлетворяющее условию $z_1=z_2+z$ или

$$a_1+b_1i=(a_2+x)+(b_2+y)\,i.$$

Для определения x и y получаем систему уравнений $a_2+x=a_1$ и $b_2+y=b_1$, имеющую единственное решение:

$$x=a_1-a_2, \quad y=b_1-b_2,$$

откуда:

$$z=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=a_1-a_2+(b_1-b_2)\,i.$$

Вычитание можно заменить сложением с числом, противоположным вычитаемому:

$$z=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1+b_1i)+(-a_2-b_2i).$$

Деление. Частное чисел z_1 и $z_2\neq 0$ есть число $z=x+yi$, удовлетворяющее условию $z_1=z_2z$, или

$$a_1+b_1i=(a_2+b_2i)(x+yi),$$

следовательно,

$$a_1+b_1i=a_2x-b_2y+(b_2x+a_2y)\,i,$$

откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_2x-b_2y&=a_1,\\ b_2x+a_2y&=b_1. \end{aligned}$$

Детерминант этой системы $\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2$ отличен от нуля. В самом деле, из условия $z_2 \neq 0$ следует, что по крайней мере одно из чисел a_2 и b_2 отлично от нуля. Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

следовательно,

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Практически для нахождения частного $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ умножают делимое и делитель на число $\overline{z}_2 = a_2 - b_2 i$, сопряженное делителю:

$$z = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Так, например,

$$\frac{2 + i}{3 - 2i} = \frac{(2 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13} i.$$

В частности число $\frac{1}{z}$, обратное данному числу z, можно представить в виде:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Теорема. *Если произведение равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, если $z_1z_2 = 0$ и если $z_1 \neq 0$, то умножая на $\frac{1}{z_1}$, получим:

$$z_2 = 0 \cdot \frac{1}{z_1} = 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

При выполнении арифметических действий над комплексными числами надлежит руководствоваться следующим общим правилом: *действия выполняются по обычным правилам действий над алгебраическими выражениями с последующей заменой i^2 на -1.*

Теорема. *При замене каждого из компонентов сопряженным ему числом результат арифметического действия тоже заменяется сопряженным числом.*

Доказательство заключается в непосредственной проверке. Так, например, если каждое слагаемое $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ заменить сопряженным числом, то получим число, сопряженное сумме $z_1 + z_2$:

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i,$$

следовательно,

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{(z_1+z_2)}.$$

Аналогично для произведения имеем:

$$\overline{z_1}\ \overline{z_2}=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)i=\overline{(z_1z_2)},$$

ч. т. д.

Теорема. *Множество комплексных чисел является полем.*

Доказательство. В самом деле, в множестве комплексных чисел выполнимы действия сложения и умножения, подчиняющиеся основным законам действий, а также выполнимы обратные действия, т. е. вычитание и деление (кроме деления на нуль). Следовательно, множество комплексных чисел обладает всеми свойствами поля, ч. т. д.

Возможность расширения поля действительных чисел посредством введения комплексных чисел не находится в противоречии с тем фактом, что поле действительных чисел является максимальным расположенным архимедовым полем. В самом деле, действительные числа не только образуют поле, но они связаны соотношениями взаимного расположения (неравенства). Архимедову полю присущи общие свойства взаимного расположения элементов (необратимость и транзитивность неравенств), свойства монотонности действий и выполнение аксиомы Архимеда. Будучи максимальным архимедовым полем, множество действительных чисел не может быть расширено таким образом, чтобы вновь полученная числовая система продолжала оставаться расположенным архимедовым полем. Следовательно, понятия „больше", „меньше" не могут быть распространены в поле комплексных чисел так, чтобы сохранились все перечисленные свойства расположенного архимедова поля. По этой причине понятия „больше" и „меньше" никак не определяются применительно к комплексным числам. Относительно двух комплексных чисел, из которых хотя бы одно не является действительным, нельзя сказать, какое больше, какое меньше. Так, например, нельзя сказать, какое из двух чисел больше $2+3i$ или $4+2i$.

Пример. Если условиться по какому-нибудь правилу сравнивать по величине комплексные числа, то хотя бы в одном пункте будут нарушаться свойства расположения элементов, имеющие место в поле действительных чисел. Условимся, например, из двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i считать бо́льшим то, которое имеет бо́льшую действительную часть, т. е. $a_1+b_1i<a_2+b_2i$, если $a_1<a_2$; если же $a_1=a_2$, то бо́льшим считается число, имеющее больший коэффициент при i. Согласно этому правилу, мы должны иметь:

$$2+3i<5-i,\quad 3-i<3+2i,\quad i>0,\quad i<1.$$

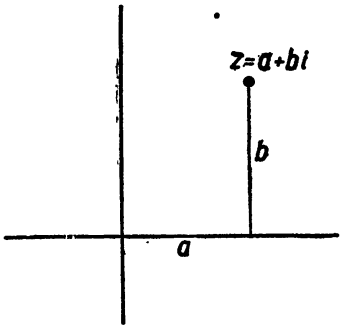
Легко убедиться, что при этом определении свойства необратимости и транзитивности неравенств сохраняются. Покажем, что аксиома Архимеда не имеет места. В самом деле, при любом натуральном n имеем:

$$i+i+i+\ldots+i=ni<1.$$

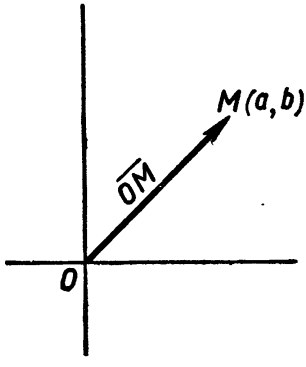
Свойство монотонности умножения также не имеет места, ибо $i>0$, но $i^2=-1<0$.

§ 53. Геометрическое изображение комплексных чисел

Условимся комплексное число $z=a+bi$ изображать точкой на плоскости, имеющей в данной прямоугольной декартовой системе координат абсциссу, равную a и ординату, равную b (черт. 35). В силу этого соглашения всякому комплексному числу соответствует единственная точка на плоскости и обратно — всякой точке плоскости $M(a, b)$ соответствует единственное комплексное число $z=a+bi$. Таким образом, *множество комплексных чисел и множество точек плоскости могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие.*



Черт. 35.



Черт. 36.

2. Всякой точке $M(a, b)$ плоскости соответствует вектор (направленный отрезок) $\boldsymbol{OM}$, соединяющий начало координат O с точкой M. Вектор $\boldsymbol{OM}$ также можно рассматривать как геометрическое изображение числа $z=a+bi$ (черт. 36). Действительные числа изображаются на плоскости точками, лежащими на оси абсцисс, а чисто мнимые числа bi — точками, лежащими на оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют также действительной осью и ось ординат мнимой осью.

Определение. *Модулем или абсолютной величиной комплексного числа $z=a+bi$ называется неотрицательное число $\sqrt{a^2+b^2}$.*

Аргументом комплексного числа $z\neq 0$ называется величина угла, который образует радиус-вектор точки z с положительным направлением действительной оси.

Модуль и аргумент числа z обозначаются соответственно символами $|z|$ и $\arg z$.

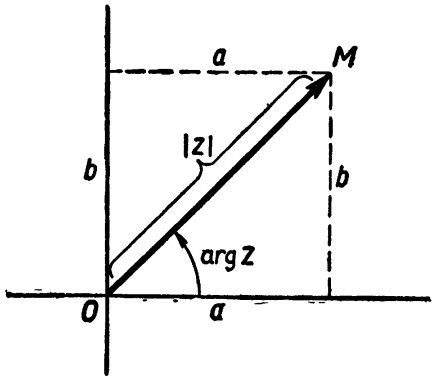
Числа a и b суть проекции на взаимно перпендикулярные оси радиуса-вектора числа z, поэтому по теореме Пифагора $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние точки, изображающей число z до начала координат (черт. 37). Если $z\neq 0$, то $|z|>0$, если $z=0$, то $|z|=0$. Если $z=a$ — действительное число, то $|z|=\sqrt{a^2}$ есть абсолютная величина a.

Если число z отлично от нуля, то его аргумент определяется неоднозначно. Пусть φ — величина угла, образованного радиусом-векто-

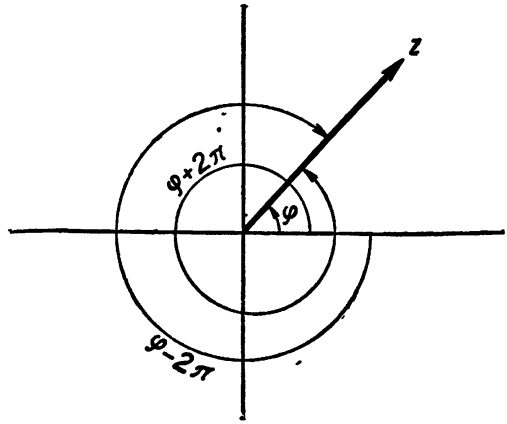
ром OM точки M с действительной осью (черт. 38), взятая в пределах от 0 до 2π. Если, не изменяя длины OM, прибавить к углу φ любое кратное 2π, то конец радиуса-вектора OM займет прежнее положение. Следовательно, любое из чисел:

$$\varphi,\ \varphi+2\pi,\ \varphi+4\pi,\ \ldots,\ \varphi-2\pi,\ \varphi-4\pi,\ \ldots$$

или в общем виде $\varphi+2k\pi$ (k — любое целое число), можно рассматривать как аргумент числа z. Геометрически ясно, что прибавив к углу φ любое целое количество полных оборотов по или против движения часовой стрелки, мы не изменим положения радиуса-вектора.



Черт. 37.



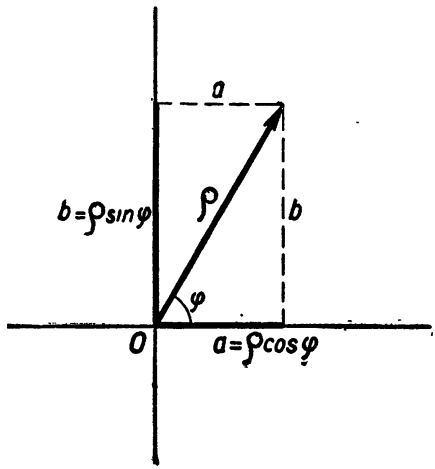
Черт. 38.

Числу 0 на плоскости не соответствует никакой радиус-вектор, поэтому считают, что нуль не имеет аргумента.

Теорема. *Всякое отличное от нуля комплексное число может быть представлено в следующей, так называемой тригонометрической форме:*

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где $\rho=|z|$, *а* φ — *любое значение* $\arg z$.



Черт. 39.

Доказательство. Если $z=a+bi$, то числа a и b равны проекциям радиуса-вектора z на оси OX и OY (черт. 39), а потому

$$a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\sin\varphi,$$

следовательно,

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ч. т. д.

При переходе к тригонометрической форме ρ и φ определяются из соотношений:

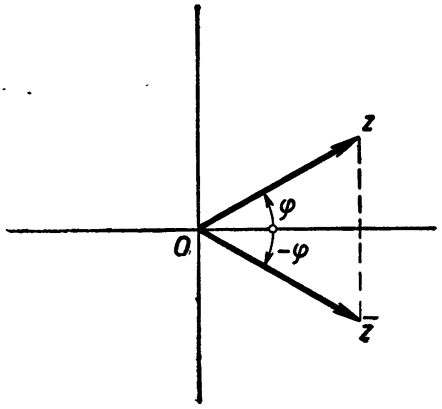
$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Взаимно сопряженные комплексные числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ изображаются точками, симметричными относительно действительной оси (черт. 40). Числа z и $\bar{z}$ имеют одинаковый модуль:

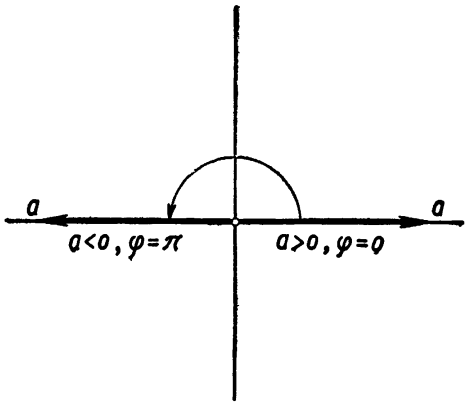
$$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Если $\varphi=\arg z$, то в качестве аргумента z можно рассматривать угол $-\varphi$:

$$\bar{z}=\rho[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)].$$



Черт. 40.



Черт. 41.

Как известно, $z\bar{z}=a^2+b^2$, т. е. произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату их модуля:

$$z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2.$$

Примеры. 1. Представить в тригонометрической форме действительное число a.

Решение. Если $a>0$, то можно положить $\varphi=0$ (черт. 41), следовательно:

$$a=a(\cos 0+i\sin 0).$$

Можно положить также $\varphi=2\pi$, или -2π или вообще $\varphi=2k\pi$. В соответствии с этим получим:

$$a=a(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi).$$

В частности имеем:

$$1=\cos 0+i\sin 0=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi.$$

Если $a<0$, то можно положить $\varphi=\pi$ (черт. 41). Следовательно:

$$a=-a(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Так, например,

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi,\quad -2=2(\cos\pi+i\sin\pi).$$

2. Представить в тригонометрической форме чисто мнимое число bi.

Решение.

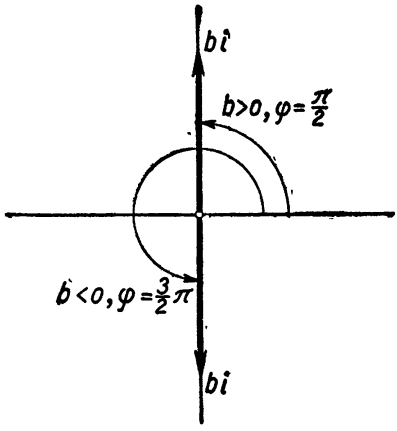
$$\cos\varphi=0,$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|b|}=\begin{cases}1 \text{ (если } b>0)\\ -1 \text{ (если } b<0).\end{cases}$$

Поэтому при $b>0$ можно положить $\varphi=\frac{\pi}{2}$, следовательно:

$$bi=b\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

При $b<0$ можно положить $\varphi=\frac{3}{2}\pi$ (черт. 42), откуда:



Черт. 42.

$$bi=-b\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$

Так, например,

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi,$$

$$\sqrt{3}i=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Представить в тригонометрической форме $z=-1+i$.

Р е ш е н и е. $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$; можно положить $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ (черт. 43), следовательно,

$$-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

4. Представить в тригонометрической форме

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha \quad (\text{где } 0\leqslant\alpha\leqslant\pi).$$

Р е ш е н и е.

$$|z|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2},\quad \sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Можно положить

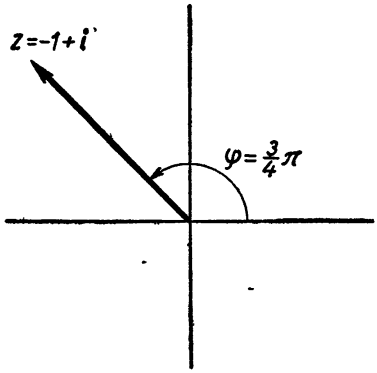
$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},$$

откуда:

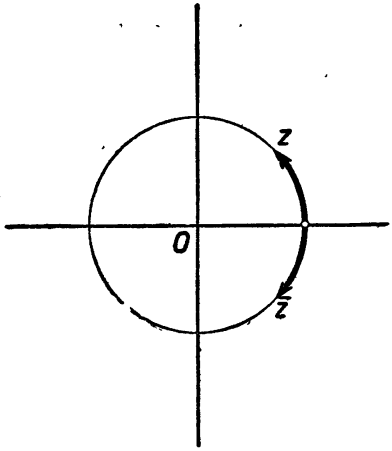
$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right].$$

5. Положим $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Определить множество точек z в предположении, что углу φ можно придавать любое значение.

Решение. $|z|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$, следовательно, точка z находится на расстоянии 1 от начала координат. Угол φ может быть любым, поэтому искомое множество есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат.



Черт. 43.



Черт. 44.

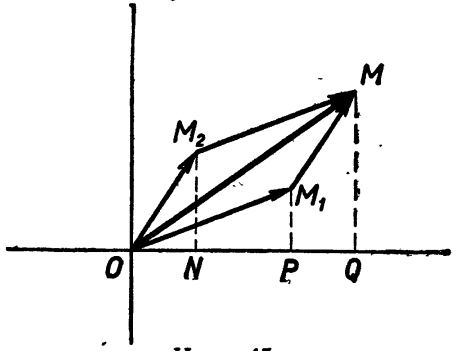
6. Какой путь описывает точка $\bar{z}$, если точка z описывает единичную окружность в направлении движения часовой стрелки?

Ответ. Ту же окружность в направлении против движения часовой стрелки (черт. 44).

§ 54. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами. Формула Моавра

Теорема. *Радиус-вектор суммы двух комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *является диагональю* OM *параллелограма* (черт. 45), *построенного на радиусах-векторах слагаемых* OM_1 и OM_2.

Теорема утверждает, что при сложении комплексных чисел радиусы-векторы складываются по правилу параллелограма, по которому складываются физические векторные величины (напр., силы, скорости, ускорения).



Черт. 45.

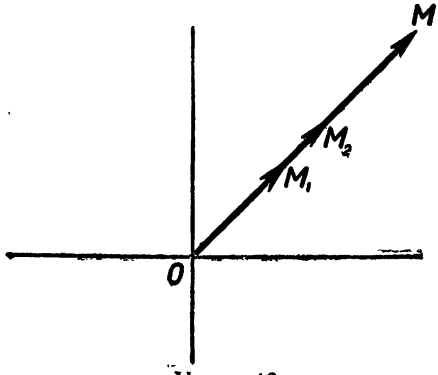
Доказательство. Вычислим проекции диагонали параллелограма на координатные оси (черт. 45):

$$\text{пр}_x OM=OQ=OP+PQ=OP+ON=\text{пр}_x OM_1+\text{пр}_x OM_2=a_1+a_2.$$

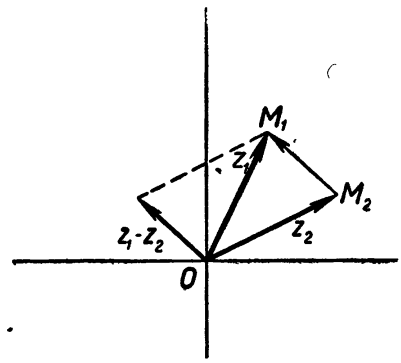
Аналогично найдем, что $\text{пр}_y \boldsymbol{OM} = b_1 + b_2$. Следовательно, точка M изображает комплексное число $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\,i$, т. е. сумму $z_1 + z_2$, ч. т. д.

Примечание. Параллелограм вырождается в прямолинейный отрезок, если векторы $\boldsymbol{OM}_1$ и $\boldsymbol{OM}_2$ расположены на одной прямой (черт. 46).

Для геометрического изображения разности $z_1 - z_2$ достаточно построить параллелограм по его диагонали z_1 и одной из его сторон z_2. Отсюда правило треугольника:



Черт. 46.



Черт. 47.

Для построения радиуса-вектора разности достаточно соединить конец радиуса-вектора вычитаемого с концом радиуса-вектора уменьшаемого и полученный вектор $\boldsymbol{M_2M_1}$ перенести параллельно самому себе, поместив его начало в точку O (черт. 47).

Геометрически модуль разности $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2.

Теорема. *Модуль произведения любого числа сомножителей равен произведению модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

Доказательство. Перемножив два комплексные числа, заданные в тригонометрической форме:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

получим.

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)],$$

или

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

откуда:

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1|\,|z_2|$$

и

$$\arg (z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

ч. т. д.

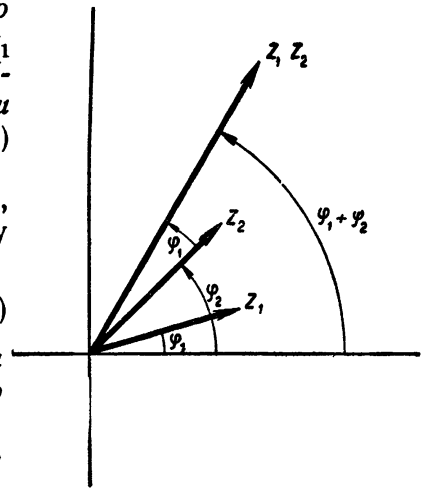
Теорема распространяется (методом индукции) на произведение любого числа сомножителей. Так, например,

$$|z_1z_2z_3| = |(z_1z_2)\,z_3| = |z_1z_2|\,|z_3| = |z_1|\,|z_2|\,|z_3|$$

и

$$\arg(z_1z_2z_3) = \arg[(z_1z_2)\,z_3] = \arg(z_1z_2) + \arg z_3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3.$$

Геометрически умножение числа z_1 на число z_2 может быть выполнено последовательным применением преобразований поворота и растяжения. *Чтобы умножить число z_1 на z_2, достаточно радиус вектор z_1 (последовательно) подвергнуть преобразованиям поворота на угол φ_2 и растяжения (или сжатия при $\rho_2 < 1$) в ρ_2 раз* (черт. 48).



Черт. 48.

При умножении n сомножителей, равных одному и тому же числу $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получим:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Отсюда ***правило:*** *При возведении комплексного числа в натуральную степень n достаточно модуль возвести в n-ю степень, а аргумент умножить на n.*

Равенство (1) можно переписать так:

$$\rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Сокращая на ρ^n, получим ***формулу Муавра:***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Рассмотрим действие деления. Пусть ρ и φ — искомые модуль и аргумент частного $z = \frac{z_1}{z_2}$, тогда $z_1 = zz_2$. Следовательно, по правилу умножения комплексных чисел мы должны иметь:

$$|z_1| = \rho|z_2| \text{ и } \arg z_1 = \varphi + \arg z_2.$$

Откуда ***правило:*** *Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент частного равен разности аргументов:*

$$\rho = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \varphi = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Примеры:

1. Доказать тождество

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \qquad (2)$$

и дать его геометрическую интерпретацию.

Решение.

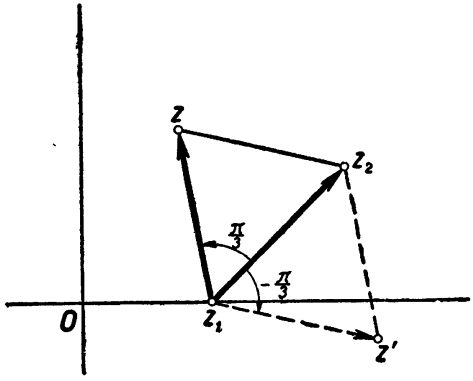
$$|z_1+z_2|^2=|(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$
$$|z_1-z_2|^2=|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

Почленным сложением получим

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2[(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)]=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

ч. т. д.

Геометрическая интерпретация очевидна: $|z_1+z_2|$ и $|z_1-z_2|$ суть длины диагоналей параллелограмма, построенного на радиусах-векторах чисел z_1 и z_2; тождество (2) выражает теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



Черт. 49.

2. Найти положение вершины правильного треугольника, если известно, что две его вершины находятся в точках $z_1=1$ и $z_2=2+i$.

Решение. Мы получим искомую вершину z, повернув вектор, соединяющий точки z_1 и z_2, вокруг точки z_1 на угол $\frac{\pi}{3}$ (черт. 49). Поворот вектора на угол $\frac{\pi}{3}$ равносилен его умножению на число

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

(при повороте вектор не должен подвергаться растяжению, а потому $|\alpha|=1$). Вектор, соединяющий точки z_1 и z_2, изображает разность

$$z_2-z_1=(2+i)-1=1+i.$$

Вектор, соединяющий точки z и z_1, изображает разность $z-z_1=z-1$. Согласно условию мы должны иметь $z-z_1=\alpha(z_2-z_1)$, откуда $z=z_1+\alpha(z_2-z_1)$ или, подставляя данные,

$$z=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Задача имеет и другое решение z', которое получим, повернув вектор, соединяющий точки z_1 и z_2, на угол $-\frac{\pi}{3}$. Заменив в предыдущих выкладках α на $\bar{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, получим:

$$z'=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Вершины z и z' расположены симметрично относительно противолежащей стороны.

3. Формула Моавра позволяет вычислять тригонометрические функции кратных дуг. Так, при $n=2$ имеем:

$$(\cos x+i\sin x)^2=\cos 2x+i\sin 2x.$$

Возводя в квадрат, получим:

$$\cos^2 x-\sin^2 x+i2\sin x\cos x=\cos 2x+i\sin 2x,$$

откуда:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Полагая $n = 3$, получим:

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x,$$

или

$$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) = \cos 3x + i \sin 3x,$$

откуда:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Чтобы получить общие выражения для $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ при любом натуральном n. Сравним действительные части и коэффициенты при i в обеих частях равенства

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Имеем: $\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + C_n^4 \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \ldots$ $(C_{n\alpha})$

$\sin n\alpha = C_n^1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + C_n^5 \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \ldots$ $(S_{n\alpha})$.

Эти формулы выражают тригонометрические функции от n-кратного аргумента через степени синуса и косинуса простого аргумента.

4. Вычислить суммы

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha$$

и

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим комплексное число $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ и вычислим сумму геометрической прогрессии:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n;$$

имеем $S_n = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$. Преобразуем степени числа z по формуле Моавра и перепишем выражение для S_n следующим образом:

$$1 + (\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \ldots + (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \frac{\cos (n+1)\alpha + i \sin (n+1)\alpha - 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1}$$

или

$$(1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha) + i (\sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha) = \frac{[\cos (n+1)\alpha - 1 + i \sin (n+1)\alpha][\cos \alpha - 1 - i \sin \alpha]}{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha}.$$

После элементарных упрощений правой части последнего равенства получим:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha + i \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha = \frac{1 - \cos \alpha + \cos n\alpha - \cos (n+1)\alpha}{2 (1 - \cos \alpha)} + i \frac{\sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha + \sin \alpha}{2 (1 - \cos \alpha)}.$$

Откуда, сравнивая действительные части и коэффициенты при мнимых частях, находим:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha = \frac{1 - \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)};$$

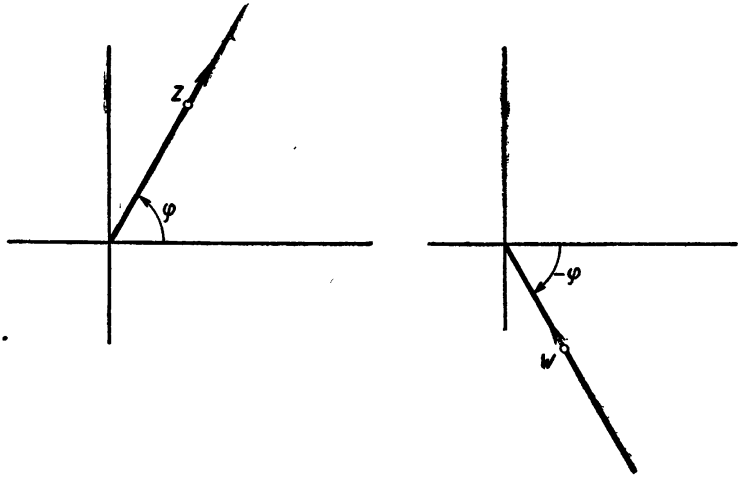
$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$$

5. Точка $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ выходит из начала координат и движется вдоль луча, образующего угол φ с действительной осью. Какой путь описывает точка $w = \frac{1}{z}$?

Решение. Имеем:

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho} \text{ и } \arg w = \arg 1 - \arg z = -\varphi.$$

При движении точки z вдоль луча, ρ возрастает от 0 до ∞, а $\arg z = \varphi$ остается неизменным. Для точки w модуль $|w| = \frac{1}{\rho}$ убывает от ∞ до нуля, а аргумент остается неизменным, равным $-\varphi$. Следовательно, точка w описывает луч, образующий угол $-\varphi$ с действительной осью, но направление движения противоположно направлению движения точки z: если z движется от начала координат, то w движется к началу координат (черт. 50).



Черт. 50.

§ 55. Извлечение корня

Покажем, что в поле комплексных чисел действие извлечения корня всегда выполнимо.

Теорема. *Если $z \neq 0$, то существуют n различных комплексных чисел, удовлетворяющих условию $w^n = z$.*

При $z = 0$ этому условию удовлетворяет единственное число $w = 0$.

Доказательство. Пусть $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — данное отличное от нуля комплексное число. Будем искать комплексное число $w=r(\cos\psi+i\sin\psi)$, n-я степень которого равна z:

$$w^n=z.$$

Согласно правилу возведения в степень мы должны иметь:

$$|z|=|w|^n \text{ и } \arg z=n\arg w. \tag{1}$$

Под символом $\arg z$ можно подразумевать произвольное значение аргумента числа z. Если φ — какое-нибудь определенное значение аргумента z, то общее выражение для аргумента z будет $\arg z=\varphi+2k\pi$. Условия (1) можно переписать следующим образом:

$$r^n=\rho \text{ и } n\psi=\varphi+2k\pi,$$

откуда:

$$r=\sqrt[n]{\rho} \text{ и } \psi=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}.$$

По теореме о существовании арифметического корня (см. § 44) для модуля w получаем единственное значение $|w|=\sqrt[n]{\rho}$. Аргумент ψ определяется неоднозначно. В самом деле, полагая $k=0, \pm1, \pm2\ldots$, получим бесконечное множество значений для ψ:

$$\ldots\psi_{-1}=\frac{\varphi}{n}-\frac{2\pi}{n},\quad \psi_0=\frac{\varphi}{n},\quad \psi_1=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \psi_k=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\ldots,$$

отсюда находим соответствующие значения:

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Покажем, что среди значений w_k имеется лишь n отличных друг от друга чисел. Полагая $k=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, получим n значений корня $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Ясно, что $w_r\neq w_s$, если $r\neq s$ (где $0\leqslant r\leqslant n-1$ и $0\leqslant s\leqslant n-1$). В самом деле, $\arg w_r=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi r}{n}$ и $\arg w_s=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi s}{n}$ не могут отличаться на кратное 2π, ибо:

$$\arg w_r-\arg w_s=\frac{2\pi(r-s)}{n},\text{ но } |r-s|<n \text{ и } \left|\frac{r-s}{n}\right|<1.$$

Нетрудно видеть, что $w_n=w_0$. В самом деле,

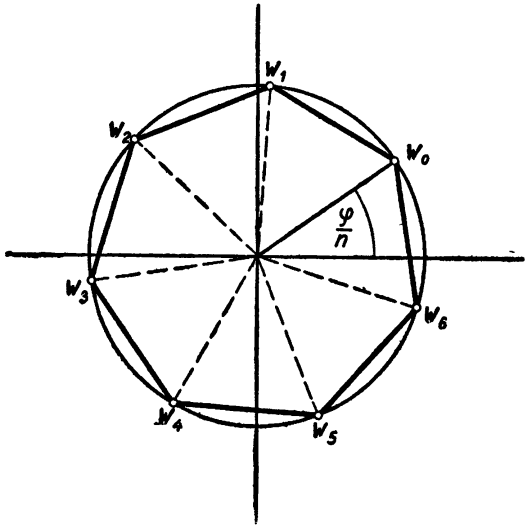
$$|w_n|=|w_0|=\sqrt[n]{\rho} \text{ и } \arg w_n=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi n}{n}=\frac{\varphi}{n}+2\pi=\arg w_0+2\pi.$$

Аналогично можно установить, что $w_0=w_{2n}=w_{3n}=\ldots=w_{-n}=w_{-2n}=\ldots$, что $w_1=w_{n+1}=w_{2n+1}=\ldots$, и вообще, что $w_k=w_l$, если $k-l$ есть число кратное n, ч. т. д.

Геометрическая интерпретация. Переход от значения корня w_k к последующему значению w_{k+1} осуществляется путем прибавления к аргументу w_k числа $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, повернув радиус-вектор точки w_0 на $\frac{1}{n}$ часть полного оборота, мы получим точку w_1; повернув радиус-вектор точки w_1 на $\frac{1}{n}$ часть полного оборота, мы получим точку w_2 и так далее. Итак, точки $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ являются вершинами правильного n-угольника с центром в точке O и с радиусом, равным $\sqrt[n]{\rho}$, одна из вершин которого находится в точке

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(черт. 51, $n=7$). Дальнейшее построение точек $w_n, w_{n+1}, \ldots$ приведет лишь к повторению уже полученных вершин правильного n-угольника.



Черт. 51.

Рассмотрим значения $\sqrt[n]{1}$. Имеем $1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\rho=1$ и $\varphi=0$. Все различные между собой значения корня находим по изложенному выше правилу:

$$\varepsilon_0 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1,$$
$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon_1^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_1^k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon_1^{n-1}.$$

Опуская значки, положим $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, тогда все значения корня n-й степени из 1 запишутся так:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1},\ \varepsilon^n = 1.$$

Умножение на число ε геометрически означает поворот радиуса-вектора множимого на $\frac{1}{n}$ часть полного оборота. Все значения корня

n-й степени из данного числа z можно получить, умножая последовательно значение

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \text{ на } \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1}.$$

В самом деле:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = w_0\cdot\varepsilon^k.$$

Итак, имеем

$$\sqrt[n]{z} = w_0,\ w_0\varepsilon,\ w_0\varepsilon^2,\ \ldots,\ w_0\varepsilon^{n-1}.$$

Примеры: 1. Найдем значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{5} \text{ и } \varepsilon^3 = 1.$$

2. Найти

$$\sqrt[3]{1+i}.$$

Решение. Представим подкоренное выражение в тригонометрической форме

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно,

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

но

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Откуда:

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right).$$

Для нахождения w_1 и w_2 следует умножить w_0 на

$$\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ и } \varepsilon^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Извлечение квадратного корня можно выполнить алгебраически без перехода к тригонометрической форме. Пусть $z=a+bi$ и $w=x+yi$. Определим x и y из условия $w^2=z$ или $(x+yi)^2=a+bi$. Следовательно,

$$x^2-y^2+2xyi=a+bi. \tag{2}$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=a\\ 2xy&=b \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Возведя обе части каждого из этих уравнений в квадрат и сложив, получим:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2.$$

Откуда

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \tag{4}$$

(берем арифметическое значение корня, так как $x^2+y^2\geqslant 0$); из уравнений (2) и (4) находим:

$$x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a),\quad y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a).$$

Следовательно,

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Уравнение (3) показывает, что при $b>0$ числа x и y должны быть одинаковы по знаку, а потому радикалы следует взять с одним и тем же знаком. Если $b<0$, то радикалы следует взять с противоположными знаками. Итак,

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

если $b>0$ и

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

если $b<0$.

Пример:

$$\sqrt{-5-12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{169}-5}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{169}+5}{2}}\right)=\pm(2-3i).$$

§ 56. Алгебраические функции и линейные уравнения

В множестве комплексных чисел выполнимы шесть алгебраических действий, поэтому можно рассматривать алгебраические выражения, считая коэффициенты и допустимые значения аргументов комплексными числами. Классификация алгебраических выражений (рациональные и иррациональные, целые рациональные и дробные) остается прежней.

В частности можно рассматривать многочлены над полем комплексных чисел и распространить на них теорию многочленов, изложенную в гл. II, для многочленов над полем рациональных чисел. Теория многочленов, рациональных функций и систем линейных уравнений основывается на возможности выполнения над коэффициентами четырех арифметических действий. Но это условие соблюдается, так как множество комплексных чисел является полем, поэтому все теоремы о многочленах, рациональных функциях и системах линейных уравнений остаются в силе применительно к полю комплексных чисел.

Следовательно,

множество многочленов с комплексными коэффициентами образует кольцо, ибо в нем выполнимы сложение, вычитание и умножение;

множество рациональных функций с комплексными коэффициентами образует поле, ибо в нем выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на нуль-многочлен).

§ 57. Основная теорема алгебры

Теорема. *Всякий многочлен положительной степени с произвольными комплексными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел по крайней мере один корень.*

Мы опускаем доказательство сформулированной основной теоремы алгебры и ограничимся лишь необходимыми разъяснениями *.

Теорема утверждает, что для всякого многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

с коэффициентами, принадлежащими полю комплексных чисел существует по крайней мере одно комплексное (в частности, может быть, действительное) число α такое, что значение многочлена при $x=\alpha$ равно нулю:

$$f(\alpha)=0.$$

Основную теорему можно сформулировать также следующим образом: *всякое алгебраическое уравнение*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

имеет в поле комплексных чисел по крайней мере один корень.

§ 58. Разложение многочлена на линейные множители

Теорема. *Всякий многочлен с одним аргументом степени $n>0$ над полем комплексных чисел может быть представлен в виде произведения n сомножителей 1-й степени.*

Доказательство. В силу основной теоремы данный многочлен

$$f_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

* Доказательство дается в курсах высшей алгебры. Оно основано на свойстве непрерывности целой рациональной функции и потому неизбежно находится в соприкосновении с идеями математического анализа.

имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень x_1. Следовательно, многочлен $f_n(x)$ делится на $x - x_1$:

$$f_n(x) = (x - x_1) f_{n-1}(x),$$

где $f_{n-1}(x)$ есть некоторый многочлен степени $n-1$. В силу основной теоремы алгебры многочлен $f_{n-1}(x)$ имеет по крайней мере один корень x_2, а потому делится на $x - x_2$:

$$f_{n-1}(x) = (x - x_2) f_{n-2}(x).$$

Откуда

$$f_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_{n-2}(x).$$

Применим основную теорему алгебры к многочлену $f_{n-2}(x)$ и выделим линейный множитель $x - x_3$. После n-го шага данный многочлен $f(x)$ представится в виде произведения n двучленов 1-й степени:

$$f_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (1)$$

(см. § 15), ч. т. д.

Следствие: *Над полем комплексных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени $ax + b$, и не существует никаких других неприводимых многочленов.*

Так, например, двучлен $x^2 + 1$, неразложимый над полем действительных чисел, поддается разложению на линейные множители над полем комплексных чисел:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть корни многочлена $f(x)$. Легко видеть, что кроме этих чисел, многочлен $f(x)$ не имеет никаких других корней. В самом деле, ни при каком значении x, отличном от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ни один из сомножителей в левой части тождества (1) не обращается в нуль, а потому и $f(x)$ не может обращаться в нуль.

Среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут оказаться и одинаковые, тогда в левой части равенства (1) соответствующие сомножители окажутся тождественными. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ отличные друг от друга корни многочлена $f_n(x)$. Если корень x_1 встречается p_1 раз, корень x_2 встречается p_2 раз и т. д., корень x_k встречается p_k раз, то разложение (1) принимает вид:

$$f_n(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} (x - x_2)^{p_2} \ldots (x - x_k)^{p_k}. \qquad (2)$$

При этом общее количество множителей первой степени должно быть равно n, т. е. $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. В силу теоремы о единственности разложения многочлена на неприводимые множители (см. § 19) разложение (2) является (не учитывая порядка сомножителей) единственно возможным.

Определение. *Если показатель степени p_l, с которым двучлен $x - x_l$ входит в разложение* (2), *больше единицы, $p_l > 1$, то x_l называется кратным корнем многочлена $f_n(x)$. Если $p_l = 1$, то x_l на-*

зывается простым корнем данного многочлена. Натуральное число p_i называется кратностью корня x_i.

Так x_1 есть p_1-кратный корень многочлена $f_n(x)$, x_2 есть p_2-кратный корень $f_n(x)$ и т. д.

Условимся каждый корень считать столько раз, какова его кратность, тогда из изложенного вытекает:

Теорема. *Всякий многочлен $f_n(x)$ (или уравнение $f_n(x)=0$) n-й степени в поле комплексных чисел имеет n корней.*

Примечание. Утверждение, что над полем комплексных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени, справедливо только для многочленов с одним аргументом. Можно показать, что существуют многочлены с многими аргументами какой угодно степени, неприводимые над полем комплексных чисел.

Рассмотрим, например, многочлен второй степени с двумя аргументами:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F \quad (\text{где } A\neq 0).$$

Составим квадратное уравнение относительно x:

$$Ax^2+(By+D)x+Cy^2+Ey+F=0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим:

$$x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{(By+D)^2-4A(Cy^2+Ey+F)}}{2A}. \tag{3}$$

Обозначим через x_1 и x_2 полученные два значения для x. Согласно изложенному выше имеет место разложение:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=A(x-x_1)(x-x_2).$$

Но множители $x-x_1$ и $x-x_2$ в общем случае не являются многочленами (относительно x и y), так как выражения для x_1 и x_2 иррациональны. Чтобы x_1 и x_2 оказались многочленами 1-й степени относительно y, надо, чтобы выражение, находящееся под радикалом в формуле (3), было точным квадратом двучлена 1-й степени. Но это выражение есть квадратный трехчлен:

$$(B^2-4AC)y^2+2(BD-2AE)y+D^2-4AF.$$

Данный трехчлен является полным квадратом, если его дискриминант равен нулю: $\Delta=0$.

Но

$$\Delta=(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF).$$

Следовательно, данный многочлен является приводимым и разлагается на множители первой степени, если его коэффициенты удовлетворяют условию $\Delta=0$.

Примеры:

1. Многочлен x^3-1 над полем действительных чисел разлагается на неприводимые множители

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Над полем комплексных чисел корнями рассматриваемого многочлена являются кубические корни из 1. Эти числа суть:

$$1,\ \varepsilon=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ и } \varepsilon^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Следовательно, над полем комплексных чисел имеем следующее разложение на линейные множители:

$$x^3-1=(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right).$$

Трехчлен x^2+x+1, неприводимый над полем действительных чисел, разлагается на множители над полем комплексных чисел:

$$x^2+x+1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2).$$

2. Найти корни многочлена

$$x^3+ix^2-4x-4i.$$

Р е ш е н и е. Применяя элементарные приемы разложения на множители, имеем:

$$x^3+ix^2-4x-4i=x^2(x+i)-4(x+i)=(x+i)(x+2)(x-2).$$

Искомые корни суть $x_1=i$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

3. Показать, что число 1 является двукратным корнем многочлена $f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$, и найти частное $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Р е ш е н и е. Представим $f(x)$ в виде:

$$nx^n(x-1)-(x^n-1).$$

Очевидно, что $f(x)$ делится на $x-1$ и

$$f(x)=(x-1)[nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)].$$

Перепишем многочлен-частное в следующем виде:

$$\frac{f(x)}{(x-1)}=n(x^n-x^{n-1})+(n-1)(x^{n-1}-x^{n-2})+$$
$$+(n-2)(x^{n-2}-x^{n-3})+\ldots+(x-1).$$

Правая часть делится на $x-1$:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2}=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+1,$$

откуда:

$$f(x)=(x-1)^2[nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+1]. \qquad (4)$$

Следовательно, 1 е с т ь п о м е н ь ш е й мере двукратный корень $f(x)$. Чтобы показать, что x есть в т о ч н о с т и двукратный корень достаточно убедиться, что второй множитель в правой части тождества (4) не обращается в нуль при $x=1$. Все коэффициенты этого множителя положительны, а потому при $x=1$ его значение положительно.

4. Показать, что трехчлен

$$x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3p+2} \qquad (5)$$

(где n, m и p любые натуральные числа) делится на трехчлен x^2+x+1.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$x^2+x+1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$$

(где ε и ε^2 — мнимые кубические корни из 1), поэтому достаточно убедиться, что ε и ε^2 суть корни многочлена (5). Полагая $x=\varepsilon$ и принимая во внимание, что $\varepsilon^3=1$, получим:

$$\varepsilon^{3n}+\varepsilon^{3m+1}+\varepsilon^{3p+2}=(\varepsilon^3)^n+(\varepsilon^3)^m\varepsilon+(\varepsilon^3)^p\varepsilon^2=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0.$$

Аналогично подстановка $x=\varepsilon^2$ дает:

$$(\varepsilon^3)^{2n}+(\varepsilon^3)^{2m}\varepsilon^2+(\varepsilon^3)^{2p}\varepsilon^4=1+\varepsilon^2+\varepsilon=0.$$

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

Вычислить произведение $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_n^2-1)$, не находя самих корней.

Решение. Имеем:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n);$$

полагая в этом тождестве $x=1$, получим:

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=a_n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)$$

или, что то же:

$$(a_0+a_2+a_4+\ldots)+(a_1+a_3+a_5+\ldots)=a_n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n).$$

Полагая $x=-1$, получим аналогично

$$(a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)=$$
$$=a_n(-1-x_1)(-1-x_2)\ldots(-1-x_n).$$

Перемножая почленно и принимая во внимание, что

$$(-1-x_k)(1-x_k)=x_k^2-1,$$

получим:

$$(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_n^2-1)=\frac{1}{a_n^2}[(a_0+a_2+\ldots)^2-(a_1+a_3+\ldots)^2].$$

§ 59. Многочлены с действительными коэффициентами

Многочлены с действительными коэффициентами можно рассматривать над полем комплексных чисел, считая для аргументов допустимыми произвольные комплексные значения. Ограничимся рассмотрением многочленов с одним аргументом.

Пусть

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

— многочлен с действительными коэффициентами.

В силу основной теоремы алгебры и вытекающих из нее следствий этот многочлен в поле комплексных чисел имеет n корней. В частности, эти корни или некоторые из них могут оказаться действительными.

Теорема. *Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет мнимый корень $\alpha=\xi+i\eta$ (где $\eta\neq 0$), то сопряженное комплексное число $\overline{\alpha}$ также является корнем $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $x=\xi+i\eta$ — некоторое комплексное значение аргумента x; соответствующее значение многочлена обозначим через $P+Qi$:

$$f(\xi+i\eta)=P+Qi.$$

Сопряженному значению аргумента $\bar{x}=\xi-i\eta$ соответствует сопряженное значение многочлена. Это ясно, ибо коэффициенты, как числа действительные, сопряжены сами себе, а каждая степень x^k при замене x сопряженным числом $\bar{x}$ заменится сопряженным числом $\overline{(x^k)}$. Итак,

$$f(\xi-i\eta)=P-Qi.$$

Если $\xi+i\eta$ есть корень многочлена $f(x)$, то $P+Qi=0$, т. е. $P=Q=0$, но тогда и $f(\xi-i\eta)=P-Qi=0$.

Следовательно, число $\xi-i\eta$ также является корнем многочлена $f(x)$, ч. т. д.

Следствие. *Число мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами является четным.* В самом деле, наличие мнимого корня влечет за собой наличие сопряженного мнимого корня. Таким образом, мнимые корни объединяются в пары взаимно сопряженных чисел.

Теорема. *Всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

Доказательство. Если бы среди корней многочлена нечетной степени не было ни одного действительного, то число мнимых корней многочлена было бы нечетным, что невозможно, ч. т. д.

Теорема. *Над полем действительных чисел неприводимыми являются только двучлены 1-й степени и квадратные трехчлены с мнимыми корнями. Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше 2-й является приводимым и может быть представлен в виде произведения множителей 1-й степени и квадратных трехчленов.*

Доказательство: 1° Как известно, двучлены первой степени и квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней (случай $\Delta<0$, § 47), неприводимы над полем действительных чисел.

2° Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет мнимый корень $\alpha=\xi+i\eta$, то он имеет и сопряженный корень $\bar{\alpha}=\xi-i\eta$, а потому делится на произведение:

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}=x^2-2\xi x+(\xi^2+\eta^2),$$

т. е. на квадратный трехчлен с действительными коэффициентами:

$$x^2+px+q, \text{ где } p=-2\xi \text{ и } q=\xi^2+\eta^2$$

(в нашем случае $\Delta=\xi^2-(\xi^2+\eta^2)=-\eta^2<0$).

3° В силу основной теоремы алгебры данный многочлен $f(x)$ имеет хотя бы один действительный или мнимый корень, а потому делится либо на двучлен 1-й степени, либо на квадратный трехчлен. Следовательно, ***кроме двучленов 1-й степени и квадратных трехчленов с мнимыми корнями над полем действительных чисел нет никаких других неприводимых многочленов.***

4° По теореме о возможности и единственности разложения многочлена на неприводимые множители (см. § 19) многочлен $f(x)$ может

быть представлен в виде произведения двучленов 1-й степени и квадратных трехчленов:

$$f(x)=C(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots$$
$$\dots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$$

[где C — числовой множитель, равный коэффициенту при старшем члене $f(x)$]. В этом разложении каждый множитель берется в степени, равной кратности соответствующего корня, ч. т. д.

Примечание. Разумеется, что в частных случаях в разложении могут отсутствовать либо множители 1-й степени, либо квадратные трехчлены.

Примеры: 1. Зная, что многочлен

$$f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$$

имеет корень $1+i$, найти прочие корни и разложить $f(x)$ на множители над полем комплексных, действительных и рациональных чисел.

Решение. Если $\alpha=1+i$ есть корень $f(x)$, то $\alpha=1-i$ также есть корень и $f(x)$ делится на трехчлен

$$(x-1-i)(x-1+i)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2.$$

Непосредственно убеждаемся, что деление происходит без остатка и в частном получается трехчлен $3x^2+x-1$. Корни последнего трехчлена суть $\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13})$. Имеем разложение $f(x)$ на неприводимые множители:

$$f(x)=3(x-1-i)(x-1+i)\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

над полем комплексных чисел;

$$f(x)=3(x^2-2x+2)\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

над полем действительных чисел;

$$f(x)=(x^2-2x+2)(3x^2+x-1)$$

над полем рациональных чисел.

2. Разложить на множители многочлен x^4+1.

Решение. Корнями соответствующего уравнения $x^4+1=0$ являются значения корня 4-й степени из -1.

Переходя к тригонометрической форме, имеем:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi,$$

откуда:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i);\quad x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

Над полем комплексных чисел имеем:

$$x^4+1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot$$
$$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Объединяя сопряженные сомножители, получим разложение на неприводимые множители над полем действительных чисел:

$$x^4+1=\left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]=$$
$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Над полем рациональных чисел многочлен x^4+1 неприводим.

3. Найти необходимое и достаточное условие, при котором многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

делится на x^2+1.

Решение. Число i, будучи корнем многочлена x^2+1, должно быть также корнем $f(x)$. Это условие является и достаточным, так как если i есть корень $f(x)$, то корнем является и $-i$, но тогда $f(x)$ делится на $(x-i)(x+i)=x^2+1$. Следовательно, искомое условие запишется так:

$$f(i)=(a_0-a_2+a_4-\ldots)+$$
$$+i(a_1-a_3+a_5-\ldots)=0,$$

откуда:

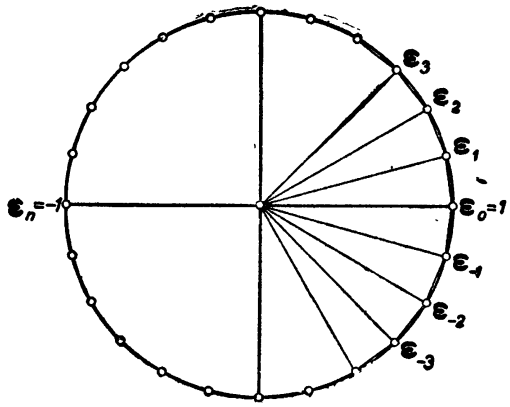
$$a_0-a_2+a_4-\ldots=0$$
и $$a_1-a_3+a_5-\ldots=0. \quad (1)$$

Рассмотрим многочлены

$$P(z)=a_0+a_2z+a_4z^2+\ldots$$
и $$Q(x)=a_1+a_3z+a_5z^2+\ldots,$$

имеем:

$$f(x)=(a_0+a_2x^2+\ldots)+x(a_1+$$
$$+a_3x^2+\ldots)=P(x^2)+xQ(x^2).$$



Черт. 52.

Условия (1) показывают, что многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ должны иметь общий корень $z=-1$.

4. Разложить на действительные множители $x^{2n}-1$.

Решение. Корнями многочлена $x^{2n}-1$ являются значения корней степени $2n$ из 1. Соответствующие точки, расположенные в вершинах правильного $2n$-угольника единичного радиуса, можно занумеровать, как показано на чертеже 52. Имеем:

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},\quad \varepsilon_2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\ldots,\quad \varepsilon_{-1}=\bar{\varepsilon}_1,\quad \varepsilon_{-2}=\bar{\varepsilon}_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_{-k}=\bar{\varepsilon}_k,\quad \ldots$$

Корни ε_k и ε_{-k} дают в разложении $x^{2n}-1$ два сопряженные комплексные сомножителя:

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k})=\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{k\pi}{n}=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1.$$

Следовательно,

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\times$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)$$

или сокращенно:

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)^{*}.$$

§ 60. Связь коэффициентов многочлена с корнями

Разложение многочлена на линейные множители позволяет установить зависимость между его коэффициентами и корнями. Приравняем в тождестве

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

соответственные коэффициенты. Коэффициенты при различных степенях x, которые получатся в правой части после раскрытия скобок, можно подсчитать на основании формулы умножения двучленов с одинаковым первым и различными вторыми членами. Этот подсчет нетрудно произвести и непосредственно. Так, коэффициент при x^{n-1} получится, если взять всеми возможными способами из одной скобки второе слагаемое, а из остальных $n-1$ скобок x; коэффициент при x^{n-2} получается, если взять всеми возможными способами вторые слагаемые из двух скобок, а из остальных $n-2$ скобок x... и так далее. Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned}
a_{n-1}&=a_n(-x_1-x_2-\ldots-x_n)\\
a_{n-2}&=a_n(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)\\
a_{n-3}&=a_n(-x_1x_2x_3-x_1x_2x_4-\ldots-x_{n-2}x_{n-1}x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_0&=a_n(-1)^nx_1x_2\ldots x_n.
\end{aligned}\qquad(1)$$

В частности, когда коэффициент при старшем члене многочлена равен 1:

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

* Знак Π употребляется как символ произведения, подобно тому, как знак Σ употребляется для обозначения суммы.

формулы примут вид:

$$\begin{aligned} p_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ p_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти формулы называются формулами Виета.

Следовательно, *если коэффициент при старшем члене многочлена степени n равен* 1, *то коэффициент* p_k *при* x^{n-k} *равен сумме всевозможных произведений корней многочлена, взятых по k со знаком* +, *если k — четное число, и со знаком* —, *если k — нечетное число.*

В применении к квадратному трехчлену

$$x^2 + px + q$$

формулы Виета запишутся так:

$$p = -(x_1 + x_2), \qquad q = x_1x_2.$$

Для кубического многочлена

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$$

будем иметь

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad p_3 = -x_1x_2x_3.$$

Формулы Виета показывают, что коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ многочлена выражаются в виде целых рациональных функций от его корней. Эти функции обладают свойством симметричности: *значения* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *не изменяются при любой перестановке корней.* Кроме $p_1, p_2, \ldots, p_n$, можно построить и другие симметрические функции. Например,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \text{ или } x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + \ldots + x_{n-1}^3x_n^3.$$

В высшей алгебре доказывается, что *всякая (целая рациональная) симметрическая функция от корней многочлена может быть выражена через основные симметрические функции* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *т. е. через коэффициенты многочлена.*

Примеры. 1. Выразить сумму квадратов корней многочлена через коэффициенты.

Решение. Возведем в квадрат сумму корней

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

или в силу равенств (2):

$$(-p_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2p_2,$$

откуда:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p_1^2 - 2p_2.$$

2. Выразить сумму кубов корней квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ через коэффициенты.

Решение. Имеем:

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$$

или

$$x_1^3+x_2^3=3pq-p^3.$$

Другое решение. Напишем условия, что x_1 и x_2 суть корни данного квадратного уравнения:

$$x_1^2+px_1+q=0,$$
$$x_2^2+px_2+q=0.$$

Умножив первое из этих равенств на x_1, а второе на x_2 и сложив, получим:

$$(x_1^3+x_2^3)+p(x_1^2+x_2^2)+q(x_1+x_2)=0,$$

но $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$ и $x_1+x_2=-p$,
откуда:

$$x_1^3+x_2^3=3pq-p^3.$$

3. Выразить следующую симметрическую функцию корней:

$$\Phi=x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2x_1^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2+x_3x_2^2$$

через коэффициенты кубического многочлена

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3.$$

Решение. Произведение $-p_1p_2$, где

$$-p_1=x_1+x_2+x_3 \text{ и } p_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$$

состоит из 9 членов, среди которых содержатся все 6 членов функции Ф, остальные три члена одинаковы и каждый из них равен $x_1x_2x_3=-p_3$, следовательно, $-p_1p_2=\Phi-3p_3$. Откуда:

$$\Phi=3p_3-p_1p_2.$$

4. Решить кубическое уравнение $x^3-9x^2+14x+24=0$, если известно, что два его корня связаны соотношением $x_1=\frac{3}{2}x_2$.

Решение. Имеем $\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{2}$ или $x_1=3k$, $x_2=2k$. В силу формул Виета

$$x_1+x_2+x_3=9,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=14,\quad x_1x_2x_3=-24.$$

Следовательно,

$$5k+x_3=9,\quad 6k^2+5kx_3=14,\quad k^2x_3=-4. \tag{3}$$

Для определения k и x_3 получилась система трех уравнений. В общем случае (для произвольного кубического уравнения) такая система не будет совместной (так как в общем случае корни кубического уравнения не связаны данным соотношением). Покажем, что для рассматриваемого уравнения система (3) совместна. Из первых двух уравнений для определения k получим квадратное уравнение:

$$19k^2-45k+14=0.$$

Откуда находим $k_1=2$, $k_2=\frac{7}{19}$; полагая $k=2$, получим:

$$x_1=6,\quad x_2=4,\quad x_3=-1.$$

Проверкой убеждаемся, что третье уравнение системы (3) удовлетворяется.

Полагая $k=\frac{7}{19}$, получим: $x_1=\frac{21}{19}$, $x_2=\frac{14}{19}$, $x_3=\frac{136}{19}$.

Проверка показывает, что третье уравнение не удовлетворяется. Это ясно и без проверки, так как кубическое уравнение имеет только три корня и не может иметь двух различных систем корней. Итак, искомые корни суть 6, 4 и -1.

5. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней данного уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Решение. Корни искомого уравнения суть x_1^2 и x_2^2, следовательно, его коэффициенты суть $p_1=-(x_1^2+x_2^2)=-(p^2-2q)$ и $q_1=x_2^2x_1^2=q^2$. Зная коэффициенты, составляем искомое уравнение

$$x^2+(2q-p^2)x+q^2=0.$$

§ 61. Преобразование уравнений

Задача решения уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

(где $f(x)$ и $\varphi(x)$ некоторые данные функции от неизвестного x) ставится следующим образом: *Дано множество допустимых значений для неизвестного x, требуется установить существуют ли, и найти, если существуют, все те допустимые численные значения x, при которых правая и левая части равенства* (1) *имеют одинаковое значение.*

Множество допустимых значений для неизвестного может быть различным. Так, например, если данное уравнение возникло из условия арифметической задачи о количестве рабочих, то допустимыми значениями x могут быть лишь натуральные числа. Если x обозначает длину стороны квадрата, то допустимыми значениями неизвестного являются положительные числа.

В элементарной алгебре обычно рассматриваются уравнения частного вида, в которых $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются алгебраическими или элементарными трансцендентными функциями.

Число решений одного и того же уравнения $f(x)=\varphi(x)$ может быть различным, в зависимости от того, какое числовое множество принято в качестве множества допустимых значений. Так, например, уравнение

$$(x+1)(x^2+1)=0$$

в множестве натуральных чисел не имеет решений, в множестве целых чисел имеет одно решение $x=-1$, в множестве действительных чисел имеет одно решение $x=-1$, в множестве комплексных чисел имеет три решения: $x=1$, $x=i$ и $x=-i$.

Примечание. Не исключена возможность, что данное уравнение

$$f(x)=\varphi(x)$$

удовлетворяется всеми допустимыми численными значениями неизвестного x. В этом случае говорят, что данное уравнение удовлетворяется тождественно при всех допустимых значениях x.

Так, например, уравнение $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}+2=x^2+3$ удовлетворяется всеми числовыми значениями x.

Предположим, что в результате выполнения некоторых математических операций над обеими частями уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

получено новое уравнение:

$$F(x)=\Phi(x). \tag{2}$$

Определение. *Уравнение* (2) *называется следствием уравнения* (*1*), *если всякое решение уравнения* (1) *является решением уравнения* (2).

Если уравнение (2) есть следствие (1), то множество всех решений уравнения (1) содержится среди решений (2), однако уравнение (2) может иметь решения, не являющиеся решениями (1). Для примера рассмотрим уравнение

$$[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2, \tag{2'}$$

получающееся из уравнения (1) возведением обеих частей в квадрат. Всякое решение уравнений (1) есть решение уравнения (2'), так как если при некотором x значения обеих частей уравнения (1) равны, то равны и их квадраты. Значит, уравнение (2') есть следствие (1). Но уравнение (2') может иметь решения, не являющиеся решениями (1). В самом деле, возводя в квадрат обе части уравнения

$$f(x)=-\varphi(x), \tag{1'}$$

мы получим в качестве следствия то же самое уравнение (2'). Значит, среди решений уравнения (2') содержатся решения обоих уравнений (1) и (1'). Так, например, уравнение

$$2x-6=x$$

имеет одно решение $x=6$, уравнение

$$(2x-6)^2=x^2$$

имеет два решения: $x_1=6$ и $x_2=2$. Из них второе является решением уравнения

$$2x-6=-x.$$

Если известны все решения уравнения (2), полученного как следствие из уравнения (1), то для нахождения решений уравнения (1) достаточно подвергнуть испытанию корни уравнения (2) путем подстановки в уравнение (1).

Все сказанное остается в силе применительно к системам уравнений.

§ 62. Эквивалентность уравнений

Определение. *Если всякое решение уравнения (или системы уравнений)*

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

является решением уравнения (или системы)

$$F(x)=\Phi(x) \tag{2}$$

и обратно — всякое решение уравнения (или системы) (2) *является решением уравнения (или системы)* (1), *то данные уравнения (или системы) называются эквивалентными.*

При решении уравнений всегда возможно данное уравнение заменить ему эквивалентным, ибо при такой замене не изменяются ни количество корней, ни их численные значения.

Примечание. При наличии кратных корней данные уравнения (1) и (2) считаются эквивалентными лишь в том случае, когда кратный корень одного из уравнений является корнем той же кратности другого уравнения.

Из определения следует что, *если уравнение*

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

является следствием уравнения

$$F(x)=\Phi(x), \tag{2}$$

а уравнение (2) *является следствием уравнения* (1), *то уравнения* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

В самом деле, если уравнение (1) может быть получено как следствие из уравнения (2), то все корни уравнения (2) являются корнями уравнения (1). Аналогично все корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2). Следовательно, уравнения (1) и (2) эквивалентны.

Понятие эквивалентности уравнений имеет относительный характер, ибо данная пара уравнений при одном множестве допустимых значений неизвестных может быть, а при другом не быть эквивалентной.

Так, например, уравнения

$$2x-2=x,$$

и

$$2x-2+\sqrt{x}=x+\sqrt{x}$$

эквивалентны над полем действительных чисел, так как единственное их общее решение есть $x=2$. Если рассматривать данные уравнения над полем рациональных чисел, то эти уравнения перестают быть эквивалентными. В нашем примере $x=2$ есть решение первого уравнения, но не является решением второго уравнения. В самом деле, в поле рациональных чисел действие извлечения корня не всегда выполнимо, и при $x=2$ выражения в правой и левой частях второго уравнения теряют смысл.

Для практики решения уравнений важно установить в общем виде, какие операции приводят к уравнению, эквивалентному данному.

Теорема. *Если выражение* $\omega(x)$ *имеет смысл при всех допустимых значениях неизвестного, то уравнения*

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

и

$$f(x)+\omega(x)=\varphi(x)+\omega(x) \tag{3}$$

эквивалентны.

Кратко эту теорему формулируют в виде правила: *к обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же слагаемое.*

Доказательство. Если при некотором численном значении x значения выражений $f(x)$ и $\varphi(x)$ одинаковы, то одинаковыми являются также значения выражений $f(x)+\omega(x)$ и $\varphi(x)+\omega(x)$. Поэтому уравнение (3) является следствием уравнения (1). Обратно, уравнение (1) есть следствие (3), так как чтобы получить (1), достаточно к обеим частям уравнения (3) прибавить $-\omega(x)$. В силу предыдущей теоремы уравнения (1) и (3) эквивалентны, ч. т. д.

На доказанной теореме основано известное правило переноса слагаемых из одной части уравнения в другую. Прибавляя к обеим частям уравнения

$$f(x)+\alpha(x)=\varphi(x)$$

одно и то же выражение $-\alpha(x)$, мы получим эквивалентное уравнение:

$$f(x)=\varphi(x)-\alpha(x),$$

в котором слагаемое $\alpha(x)$ находится с обратным знаком в другой части.

Примечание. Уравнения (1) и (3) могут оказаться не эквивалентными, если выражение $\omega(x)$ имеет смысл не при всех допустимых значениях неизвестного. Это будет иметь место, если $x=a$ есть корень уравнения (1), но при $x=a$ выражение $\omega(x)$ теряет смысл. Пример был рассмотрен в настоящем параграфе на стр. 174.

Вот другой пример: уравнение $3x-1=2x$ имеет корень $x=1$, но $x=1$ не является корнем уравнения

$$3x-1+\frac{1}{x-1}=2x+\frac{1}{x-1}.$$

Теорема. *Если выражение* $\omega(x)$ *имеет смысл и отлично от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, то уравнения*

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

и

$$\omega(x)f(x)=\omega(x)\varphi(x) \tag{4}$$

эквивалентны.

Доказательство. Если значения обеих частей уравнения (1) равны, то равны и значения обеих частей уравнения (4). Поэтому уравнение (4) есть следствие (1). Обратно, уравнение (1) есть следствие уравнения (4). В самом деле, выражение $\frac{1}{\omega(x)}$ имеет смысл при всех допустимых значениях, ибо $\omega(x)\neq 0$. Умножая (4) почленно на $\frac{1}{\omega(x)}$, получим в качестве следствия (1), ч. т. д.

Следствие. *Обе части уравнения можно умножить на произвольное отличное от нуля число.*

Если множитель $\omega(x)$ может обращаться в нуль при некоторых допустимых значениях неизвестного, то в общем случае эквивалентность уравнений (1) и (4) утверждать невозможно. В самом деле, уравнению (4) удовлетворяют все числа, обращающие в нуль $\omega(x)$, т. е. все корни уравнения $\omega(x)=0$. Но среди корней последнего уравнения могут быть числа, не являющиеся корнями уравнения (1).

Так, например, уравнение $3x+1=2x$ имеет корень $x=-1$, но уравнение $(x-2)(3x+1)=(x-2)2x$, кроме $x=-1$, имеет корень $x=2$.

Если обе части уравнения возвести в некоторую (целую положительную) степень, то в общем случае получится уравнение, не эквивалентное данному. В самом деле, уравнение

$$[f(x)]^n=[\varphi(x)]^n \tag{5}$$

есть следствие уравнения

$$f(x)=\varphi(x). \tag{1}$$

Но, кроме решений уравнения (1), уравнению (5) удовлетворяют решения любого из уравнений

$$f(x)=\varepsilon\varphi(x),$$

где ε — произвольное значение корня n-й степени из 1. Заметим, что над полем действительных чисел при нечетном n уравнения (1) и (5) эквивалентны. В самом деле, $\sqrt[n]{1}$ при нечетном n имеет лишь одно действительное значение 1. При n четном $\sqrt[n]{1}$ имеет в поле действительных чисел два значения ± 1, поэтому уравнению (5) удовлетворяют все решения уравнений (1) и $f(x)=-\varphi(x)$.

Относительно систем уравнений ограничимся следующей теоремой.

Теорема. *Если детерминант* $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *отличен от нуля, то системы уравнений*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \ldots)&=0 \\ \Phi(x, y, \ldots)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_1F(x, y, \ldots)+b_1\Phi(x, y, \ldots)&=0 \\ a_2F(x, y, \ldots)+b_2\Phi(x, y, \ldots)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

эквивалентны.

Доказательство. Очевидно, что всякое решение системы (I) является решением системы (II). Обратно, всякое решение системы (II) есть решение (I). В самом деле, систему (II) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно F и Φ, но при $\Delta\neq 0$ система (II) может удовлетворяться лишь нулевыми значениями $F=\Phi=0$, ч. т. д.

Следствие. Система

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \ldots)+\Phi(x, y, \ldots)&=0 \\ F(x, y, \ldots)-\Phi(x, y, \ldots)&=0 \end{aligned}\right\},$$

полученная сложением и вычитанием уравнений (1), эквивалентна системе (I), так как в этом случае

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

§ 63. Уравнения 2-й и 3-й степеней

Произвольным заданным численным значениям коэффициентов уравнения

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

соответствуют вполне определенные значения его корней. В этом смысле и следует понимать утверждение, что *корни алгебраического уравнения вполне определяются, если известны численные значения его коэффициентов.*

Задача алгебраического решения уравнения данной степени ставится следующим образом: построить формулу, выражающую значения корней уравнения через его коэффициенты посредством шести алгебраических действий. Эта задача не всегда имеет решение (подробнее см. следующий параграф), такие формулы не всегда можно построить. Для уравнений первой и второй степеней формулы, выражающие (алгебраически) корни через коэффициенты, известны из школьного курса.

Задача решения уравнения может ставиться иначе: указать правила, посредством которых корни данного уравнения могут быть вычислены с любой данной степенью точности (об этом см. ниже, § 118).

Остановимся на вопросе об алгебраическом решении уравнений второй и третьей степеней.

Пусть дано квадратное уравнение:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\text{где } a\neq 0).$$

Умножив обе части на a, выделим в левой части полный квадрат:

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4}=0,$$

откуда получим уравнение, эквивалентное данному:

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4}.$$

Действие извлечения корня выполнимо в поле комплексных чисел, а потому из последнего уравнения находим:

$$ax+\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}$$

и, наконец,

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Взяв для радикала два различные его значения, получим два решения данного уравнения. Обычно пишут

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

где радикал $\sqrt{b^2-4ac}$ обозначает одно какое-либо значение квадратного корня.

Полученная формула выражает корни уравнения второй степени через его коэффициенты при помощи шести алгебраических действий.

Рассмотрим решение уравнения 3-й степени:

$$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0. \qquad (1)$$

Без ущерба для общности полагаем коэффициент a_3 при x^3, равным 1, ибо если $a_3\neq 1$, то, разделив уравнение почленно на a_3, получим уравнение вида (1), эквивалентное данному. Преобразуем уравнение (1) к новому неизвестному y, положив $x=y+h$, где число h подберем так, чтобы преобразованное уравнение не содержало квадрат неизвестного. Легко непосредственно подсчитать, что коэффициент при y^2 будет $3h+a_2$. Из условия $3h+a_2=0$ находим $h=-\frac{a_2}{3}$. После преобразования к новому неизвестному уравнение (1) принимает вид:

$$y^3+py+q=0. \qquad (2)$$

Введем два новые неизвестные u и v, положив:

$$y = u + v.$$

Уравнение (2) примет вид:

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \qquad (3)$$

Одно из неизвестных u и v можно выбрать произвольно.

Пользуясь этим произволом, выберем u и v так, чтобы выполнялось условие:

$$3uv + p = 0, \text{ или } uv = -\frac{p}{3}. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (3) принимает вид:

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Возведя (4) в куб, найдем:

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Следовательно, u^3 и v^3 суть корни квадратного уравнения

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

и можно положить:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ и } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Отсюда получается формула решения кубического уравнения, называющаяся формулой Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Комбинируя в формуле Кардано каждое из трех значений первого радикала с каждым из трех значений второго радикала, получим 9 чисел, из которых только 3 являются решениями данного уравнения. В самом деле, значения u и v нельзя выбирать независимо друг от друга, так как они должны удовлетворять условию (4). Пусть u одно из значений первого радикала, тогда все три возможные значения для u суть:

$$u_1 = u, \quad u_2 = \varepsilon u, \quad u_3 = \varepsilon^2 u,$$

где ε и ε^2 — мнимые значения кубического корня из 1. Соответствующие значения для v находятся из соотношения (4):

$$v_1 = -\frac{p}{3u}, \quad v_2 = -\frac{p}{3u\varepsilon} = -\frac{p\varepsilon^2}{3u\varepsilon^3} = -\frac{p}{3u}\varepsilon^2,$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u\varepsilon^2} = -\frac{p}{3u}\varepsilon.$$

Значения корней кубического уравнения определяются из соотношения $y=u+v$, следовательно, искомые корни суть

$$y_1=u-\frac{p}{3u},\quad y_2=\varepsilon u-\varepsilon^2\frac{p}{3u}\quad\text{и}\quad y_3=\varepsilon^2u-\varepsilon\frac{p}{3u}.$$

Последние формулы теряют смысл, если $u=0$, т. е.

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=0,\ \text{откуда}\ \frac{p^3}{27}=0\ \text{или}\ p=0.$$

В этом случае уравнение принимает вид $y^3+q=0$ и решается непосредственно: $y=\sqrt[3]{-q}$.

Тот же результат получится, если положить в формуле Кардано $p=0$.

Примеры: **1.** Решить уравнение

$$x^3-3x^2-3x+11=0.$$

Р е ш е н и е: Полагаем $x=y+h$, получим:

$$y^3+(3h-3)y^2+(3h^2-6h-3)y+(h^3-3h^2-3h+11)=0.$$

Полагая $3h-3=0$, получим $h=1$. Уравнение принимает вид:

$$y^3-6y+6=0.$$

Положим в формуле Кардано $p=-6$, $q=6$, имеем:

$$u=\sqrt[3]{-3+\sqrt{9-\frac{6^3}{27}}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}.$$

Определяем v из условия

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{6}{3\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}.$$

Следовательно,

$$y_1=u+v=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},$$

$$y_2=-\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}).$$

$$y_3=-\sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}-\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}).$$

Откуда:

$$x_1=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1,$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+1+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}),$$

$$x_3=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+1-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}).$$

2. Решить уравнение

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Решение. Положим в формуле Кардано $p = -7$, $q = 6$, получим:

$$x = \sqrt[3]{-3 + \frac{10\sqrt{3}\,i}{9}} + \sqrt[3]{-3 - \frac{10\sqrt{3}\,i}{9}}. \qquad (5)$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что данное уравнение имеет три действительные корня:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad \text{и} \quad x_3 = -3.$$

Попытка преобразовать выражение (5) и представить его в действительной форме встречает следующую трудность, связанную с преобразованием радикалов. Пусть требуется извлечь кубический корень из мнимого числа $a + bi$. Положим:

$$\sqrt[3]{a + bi} = x + iy.$$

Возводя в куб, получим:

$$a + bi = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3).$$

Откуда для определения x и y получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= a, \\ 3x^2y - y^3 &= b. \end{aligned}$$

Попытка решить эту систему снова привела бы к необходимости решать кубическое уравнение и извлекать корень из комплексных чисел, т. е. по сути дела мы снова возвратились бы к исходному вопросу. Таким образом, формула Кардано представляет действительные корни формулами, содержащими мнимости. Попытка алгебраически освободить эти выражения от мнимости не приводит к цели. Подобный случай имеет место всегда, когда все три корня кубического уравнения действительны и различны, и называется неприводимым случаем*.

§ 64. Задача о разрешимости уравнений в радикалах. Двучленные уравнения

Основная теорема алгебры утверждает существование корней всякого многочлена в поле комплексных чисел, однако, она не указывает пути к их отысканию. Выше мы вывели формулы, непосредственно выражающие корни уравнения 2-й и 3-й степеней через коэффициенты. Обращаясь к этим формулам мы видим, что они выражают значения корней уравнения 2-й и 3-й степеней через коэффициенты посредством шести алгебраических действий. *Уравнение 4-й степени также может быть в общем виде решено алгебраически, так как для него может быть построена формула, выражающая корни через значения коэффициентов посредством алгебраических действий.* Ввиду громоздкости эта формула имеет незначительную практическую ценность, и мы не останавливаемся на ее выводе.

* Как можно показать, в этом случае не существует формул, выражающих действительные корни через действительные радикалы.

Учеными было затрачено немало трудов в поисках формулы, дающей в алгебраическом виде решение уравнений 5-й и более высоких степеней. Однако все эти попытки не увенчались успехом. В первой половине прошлого столетия вопрос был разрешен в отрицательном смысле. Н. Абель доказал, что *в общем виде уравнения выше 4-й степени не могут быть решены алгебраически.*

Теорема Абеля не утверждает отсутствие корней уравнений степени выше 4-й (это противоречило бы основной теореме алгебры), она утверждает лишь, что эти корни невозможно выразить через коэффициенты посредством алгебраических действий. С теоремой Абеля не находится в противоречии и тот факт, что некоторые частные виды уравнений высших степеней могут быть решены алгебраически.

Остановимся более подробно на постановке вопроса об алгебраическом решении уравнений. Алгебраическое решение уравнения носит название решения уравнения в радикалах, ибо формула, выражающая корни уравнения степени выше 1-й через коэффициенты (если только эта формула может быть построена), кроме рациональных операций над коэффициентами, непременно должна содержать действие извлечения корня, т. е. радикалы. В самом деле, общая формула решения уравнения некоторой степени n (где $n > 1$) должна давать все n корней данного уравнения. Если бы эта формула не содержала радикалов, то она являлась бы рациональным выражением относительно коэффициентов. Поэтому, в силу однозначности рациональных операций, по этой формуле можно было бы вычислить лишь один, а не n корней уравнения.

Извлечь корень n-й степени из данного числа A в поле комплексных чисел — это значит найти все его n значений. Последнюю задачу можно толковать как задачу решения уравнения

$$x^n = A$$

или равносильного уравнения

$$x^n - A = 0.$$

Уравнения вида $x^n - A = 0$ называются двучленными.

Двучленные уравнения были рассмотрены в § 55, посвященном извлечению корня в поле комплексных чисел.

Задачу решения уравнения в радикалах можно сформулировать следующим образом: *Выразить корни данного уравнения через его коэффициенты посредством последовательного выполнения ряда рациональных операций и решения двучленных уравнений.* Так, например, для отыскания корней кубического уравнения следует:

1° выполнить рациональные действия:

$$z_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27};$$

2° решить двучленное уравнение:

$$z_2^2 = z_1;$$

3° выполнить следующую рациональную операцию над z_2 и коэффициентами уравнения:

$$z_3 = -\frac{q}{2} + z_2;$$

4° решить двучленное уравнение:

$$u^3 = z_3;$$

5° выполнить рациональную операцию:

$$x = u - \frac{p}{3u}.$$

Теорема Абеля утверждает, что *посредством цепи последовательного применения рациональных действий и решения двучленных уравнений не могут быть найдены в общем виде корни уравнения выше 4-й степени.*

Итак, для уравнения n-й степени при $n > 4$ невозможно построить общей формулы, выражающей его решения в радикалах. Однако теорема Абеля не дает ответа на вопрос, может ли быть решено алгебраически всякое данное конкретное уравнение. Э. Галуа показал, что существуют конкретные уравнения, неразрешимые алгебраически*. Примером уравнения с числовыми коэффициентами, неразрешимого в радикалах, может служить

$$x^5 - 9x - 3 = 0.$$

Примечание. Само решение двучленных уравнений (т. е. извлечение корня из комплексных чисел) в общем случае осуществляется путем применения тригонометрических операций, не являющихся алгебраическими.

На стр. 160 мы показали, что $\sqrt{a+bi}$ может быть выражен алгебраически через a и b. Иная картина получается в случае кубического корня. В примере 2 предыдущего параграфа указано, что попытка извлечения кубического корня из комплексного числа алгебраически не может увенчаться успехом, так как снова приводит к необходимости извлекать корни из комплексных чисел. Применение правила извлечения корня из числа, данного в тригонометрической форме, выходит за пределы алгебраических операций.

---

* В работах Н. Г. Чеботарева, Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеева и других советских ученых теория Галуа получила дальнейшее развитие. За фундаментальный труд в этой области чл.-корр. Академии наук СССР профессор Казанского университета Н. Г. Чеботарев был удостоен Сталинской премии первой степени.

§ 65. Частные приемы решения уравнений

Решение алгебраического уравнения в поле комплексных чисел и разложение соответствующего многочлена на множители 1-й степени суть равносильные задачи. В самом деле, зная корни уравнения

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0, \qquad (1)$$

можно разложить соответствующий многочлен на множители:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \qquad (2)$$

Обратно — зная разложение (2) многочлена на множители, мы тем самым знаем его корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема. *Если левая часть уравнения*

$$f(x) = 0 \qquad (3)$$

может быть представлена в виде произведения нескольких сомножителей

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \ldots \varphi_k(x),$$

то для нахождения корней уравнения (3) *достаточно найти все корни каждого из уравнений*

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k(x) = 0. \qquad (4)$$

Доказательство. Всякий корень уравнения (3) удовлетворяет хотя бы одному из уравнений (4). В самом деле, уравнение (3) может быть переписано в виде:

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \ldots \varphi_k(x) = 0.$$

Но произведение обращается в нуль, если хотя бы один из его сомножителей равен нулю. Поэтому обращение в нуль $f(x)$ влечет за собой обращение в нуль хотя бы одного из сомножителей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$.

Обратно, если хотя бы один из этих сомножителей обращается в нуль, то и $f(x)$ обращается в нуль, ч. т. д.

Таким образом, задача сводится к решению ряда уравнений посредством приравнивания нулю каждого множителя в отдельности.

Решая каждое из уравнений (4), следует брать лишь те корни, которые принадлежат множеству допустимых значений для неизвестного. Рассмотрим, например, уравнение

$$(x - 1)(x^2 + 1)\frac{1}{(x-1)^2} = 0.$$

Приравнивая поочередно нулю сомножители, получим:

$x - 1 = 0$, откуда $x = 1$;
$x^2 + 1 = 0$, откуда $x = i$ и $x = -i$;
$\frac{1}{(x-1)^2} = 0$ не имеет решений.

Решения данного уравнения суть $x=i$ и $x=-i$. Корень первого уравнения $x=1$ следует исключить. В самом деле, число 1 не принадлежит множеству допустимых значений неизвестного, ибо при $x=1$ левая часть исходного уравнения теряет смысл. В самом деле, несократимая дробь $\frac{x^2+1}{x-1}$, тождественная левой части, не имеет смысла при $x=1$.

Рассмотрим уравнение

$$(x+1)\lg x=0;$$

поступая формально по общему правилу, получим:

$$x+1=0, \quad \text{откуда } x=-1;$$
$$\lg x=0, \quad \text{откуда } x=1.$$

Но $x=-1$ не есть допустимое значение для неизвестного, ибо при $x=-1$ теряет смысл $\lg x$, а следовательно, и вся левая часть исходного уравнения.

Если левая часть уравнения $f(x)=0$ есть многочлен, представленный в виде произведения ряда множителей (не обязательно 1-й степени), то задача решения данного уравнения сводится к решению нескольких уравнений (по числу сомножителей) более низкой степени.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0.$$

Решение. Разлагаем левую часть на множители:

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x^4+2x^3)+(5x^2+10x)-$$
$$-(6x+12)=x^3(x+2)+5x(x+2)-6(x+2)=$$
$$=(x+2)(x^3+5x-6)=(x+2)[(x^3-1)+5(x-1)]=$$
$$=(x+2)(x-1)(x^2+x+6).$$

Решение данного уравнения сводится к решению двух уравнений 1-й степени и одного уравнения 2-й степени:

$$x+2=0, \quad x-1=0, \quad x^2+x+6=0,$$

откуда:

$$x_1=-2, \quad x_2=1, \quad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{2}.$$

Примечание. В ряде частных случаев можно выполнить извлечение корня, не прибегая к представлению подкоренного числа в тригонометрической форме. Как известно, извлечение корня степени n из числа a равносильно решению уравнения $x^n-a=0$.

Примеры: 2. Вычислить значения кубического корня из 1.
Решение. Требуется решить уравнение $x^3-1=0$ или

$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

откуда $x-1=0$ и $x^2+x+1=0$; следовательно,

$$x_1=1, \quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Вычислить $\sqrt[4]{1}$. Решаем уравнение $x^4-1=0$. Разлагая левую часть на множители получаем:

$$(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0,$$

откуда:

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=i,\ x_4=-i.$$

4. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Решаем уравнение $x^4+1=0$. Разлагаем левую часть на множители

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0$$

(см. § 47).

Откуда, решая квадратные уравнения,

$$x^2+\sqrt{2}x+1=0 \quad \text{и} \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0,$$

находим:

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

Трехчленные уравнения. Трехчленные уравнения вида:

$$x^{2n}+px^n+q=0$$

решаются в радикалах. Введем новое неизвестное $y=x^n$, тогда получим квадратное уравнение:

$$y^2+py+q=0,$$

откуда:

$$y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

и, следовательно,

$$x=\sqrt[n]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

К этому типу относятся биквадратные уравнения: $x^4+px^2+q=0$.

Примеры: **5.** Решить уравнение

$$x^6-3x^3+2=0.$$

Решение. Определяем $z=x^3$ из квадратного уравнения

$$z^2-3z+2=0.$$

Имеем $z_1=1$ и $z_2=2$, следовательно, получим два уравнения $x^3=1$ и $x^3=2$, из которых находим:

$$x_1=1,\ x_2=\varepsilon,\ x_3=\varepsilon^2,\ x_4=\sqrt[3]{2},\ x_5=\varepsilon\sqrt[3]{2},\ x_6=\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$$

(где ε и ε^2 мнимые кубические корни из 1).

6. Найти все значения $\sqrt[6]{-1}$.

Решение. Решаем уравнение $x^6+1=0$.

Имеем:

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0,$$

следовательно, надо решить два уравнения

$$x^4-x^2+1=0 \quad \text{и} \quad x^2+1=0. \tag{5}$$

Первое есть биквадратное уравнение; полагая $x^2=z$, получим:

$$z^2-z+1=0, \text{ откуда } z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

Следовательно,

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}.$$

По правилу извлечения квадратного корня из комплексного числа (см. § 55) получим:

$$x_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right).$$

Аналогично

$$x_{3,4}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i\right).$$

Решая второе уравнение (5), найдем $x_{5,6}=\pm i$.

Возвратные уравнения. Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+cx^2+bx+a=0,$$

в котором коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца одинаковы. Легко видеть, что ни один из корней возвратного уравнения не равен нулю. В самом деле, если бы $x=0$ был корнем уравнения, то мы имели бы $a=0$, т. е. уравнение имело бы более низкую степень.

Рассмотрим сначала возвратное уравнение четной степени ($n=2k$). Разделив уравнение почленно на x^k и сгруппировав члены, как показано ниже, получим:

$$a\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+b\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)+\ldots+l\left(x+\frac{1}{x}\right)+f=0. \qquad (6)$$

Положив $x+\frac{1}{x}=y$, найдем:

$$y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}, \quad y^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}, \ldots,$$

$$y^k=x^k+kx^{k-2}+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}x^{k-4}+\ldots+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}\frac{1}{x^{k-4}}+$$

$$+k\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}.$$

Откуда последовательно находим

$$x+\frac{1}{x}=y, \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \text{ и т. д.} \qquad (7)$$

Подставляя в (6), получим уравнение k-й степени относительно y. Соответствующие значения x находим из квадратного уравнения

$$x^2-xy+1=0.$$

Решение возвратного уравнения нечетной степени ($n=2k+1$) приводится к решению возвратного уравнения четной степени. Как легко видеть непосредственно, уравнение

$$ax^{2k+1}+bx^{2k}+cx^{2k-1}+\ldots+cx^2+bx+a=0$$

имеет корень $x=-1$, следовательно, его левая часть делится на $x+1$. Представим левую часть уравнения в виде суммы слагаемых, каждое из которых делится на $x+1$:

$$a(x^{2k+1}+1)+bx(x^{2k-1}+1)+cx^2(x^{2k-3}+1)+\ldots+$$
$$+lx^k(x+1)+0.$$

Разделив каждый член на $x+1$, представим частное в следующем виде:

$$ax^{2k}-ax^{2k-1}+ax^{2k-2}-\ldots\ldots-ax+a+$$
$$+bx^{2k-1}-bx^{2k-2}+\ldots\ldots+bx+$$
$$+cx^{2k-2}-\ldots+cx^2+$$
$$+\ldots\ldots\ldots+$$
$$+lx^k+$$

Коэффициенты членов частного, равноотстоящих от начала и конца, равны между собой; следовательно, данное уравнение может быть представлено в виде

$$(x+1)(ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a)=0.$$

Таким образом, задача сводится к решению возвратного уравнения четной степени

$$ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a=0.$$

Примеры: 7. Вычислить все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решаем уравнение $x^5-1=0$. Левая часть разлагается на множители:

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

откуда получаем два уравнения:

$$x-1=0 \text{ и } x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Первое дает $x_1=1$. Второе уравнение решаем как возвратное:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Полагаем $x+\frac{1}{x}=y$, в силу соотношений (7), получим:

$$(y^2-2)+y+1=0 \text{ или } y^2+y-1=0.$$

Откуда:

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};$$

для определения x получим квадратные уравнения:

$$2x^2-(-1+\sqrt{5})x+2=0 \text{ и } 2x^2+(1+\sqrt{5})x+2=0.$$

Из первого находим

$$x_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{6-2\sqrt{5}-16}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Аналогично из второго найдем

$$x_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

8. Решить уравнение

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$$

Решение. Один из корней данного уравнения известен: $x_1=-1$. Разделив левую часть на $x+1$, получим для определения других корней возвратное уравнение

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0.$$

Полагая $y=x+\frac{1}{x}$, получим:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=2(y^2-2)+3y-16=0,$$

откуда:

$$y_1=-4,\quad y_2=\frac{5}{2}.$$

Для определения x имеем два уравнения:

$$x^2+4x+1=0 \text{ и } 2x^2-5x+2=0.$$

Из первого найдем $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$, из второго получим

$$x_4=2 \text{ и } x_5=\frac{1}{2}.$$

Дробные уравнения. Рассмотрим уравнение $R(x)=0$, левая часть которого является дробной рациональной функцией. После выполнения тождественных преобразований левая часть может быть представлена в виде тождественной несократимой дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней. В самом деле, если число a было бы их общим корнем, то оба многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ делились бы на $x-a$ и дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не являлась бы несократимой. Для нахождения всех решений данного уравнения достаточно решить уравнение $P(x)=0$.

Рассмотрим дробное уравнение

$$R_1(x)=R_2(x) \qquad (R)$$

(где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции); предположим, что при $x=a$ функции $R_1(x)$ и $R_2(x)$ теряют смысл. Если придерживаться первоначального определения решения уравнения, то число a следует исключить из множества допустимых значений неизвестного.

Представим рациональную функцию $R_1(x)-R_2(x)$ в каноническом виде, т. е. в виде тождественной несократимой дроби:

$$R_1(x)-R_2(x)\equiv\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Примем следующее ***дополнительное определение:*** *условимся число a считать корнем уравнения (R), если a является корнем уравнения* $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$.

Приняв это дополнительное определение, мы расширяем множество допустимых значений неизвестного, так как теперь считаются допустимыми все те значения x, при которых дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет смысл. При

этом корнем уравнения теперь считается всякое число $x=a$, если только $P(a)=0$, хотя дроби $R_1(x)$ и $R_2(x)$, рассматриваемые по отдельности, могут терять смысл при $x=a$.

Примеры: 9. Решить уравнение:

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0.$$

После приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x+2)(x-2)}=0.$$

Сокращая левую часть на $x-2$, получим уравнение:

$$\frac{x-3}{x(x+2)}=0.$$

Единственное решение уравнения есть $x=3$.

10. Решить уравнение

$$\frac{x^2+5}{x^2+x-2}=\frac{2}{x-1}.$$

Перенеся дробь $\frac{2}{x-1}$ в левую часть после элементарных преобразований, получим:

$$\frac{x-1}{x+2}=0.$$

Уравнение имеет корень $x=1$ (согласно дополнительному определению).

В отдельных частных случаях в процессе решения уравнений оказываются целесообразными различные искусственные преобразования, которые невозможно предусмотреть общей теорией.

Примеры: 11. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0.$$

Решение. Полагая $(x+1)^2=y$, получим:

$$\frac{1}{y-4}+\frac{18}{y+1}-\frac{18}{y}=0.$$

Для определения y получим квадратное уравнение:

$$y^2-17y+72=0,$$

из которого находим $y_1=9$, $y_2=8$. Числа 8 и 9 не являются корнями общего знаменателя и, следовательно, удовлетворяют дробному уравнению. Для x получаем два уравнения:

$$(x+1)^2=9 \text{ и } (x+1)^2=8,$$

откуда:

$$x_1=2,\quad x_2=-4,\quad x_{3,4}=-1\pm 2\sqrt{2}.$$

12. Показать, что уравнение $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ можно привести к биквадратному уравнению.

Р е ш е н и е. Положим $\frac{a+b}{2}=h$, $\frac{a-b}{2}=k$, тогда $a=h+k$, $b=h-k$ и уравнение принимает вид:

$$(x+h+k)^4+(x+h-k)^4=c.$$

Преобразуем уравнение к новому неизвестному $y=x+h$, получим:

$$(y+k)^4+(y-k)^4=c,$$

или после упрощений:

$$y^4+6k^2y^2+k^4-\frac{c}{2}=0.$$

13. Показать, что уравнение

$$x^4+a^4=kax(x^2+a^2) \quad (\text{где } a\neq 0)$$

можно привести к возвратному уравнению.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение к новому неизвестному, положив $x=ay$, получим:

$$(ay)^4+a^4=ka^2y(a^2y^2+a^2)$$

или

$$y^4-ky^3-ky+1=0,$$

т. е. возвратное уравнение.

14. Решить уравнение

$$\frac{x^2+2ax+ac}{x^2+2cx+ac}=\frac{ax}{(x+a)(x+c)}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие два возможные случая:

А) $a\neq c$. Составим производную пропорцию:

$$\frac{2x^2+2(a+c)x+2ac}{2(a-c)x}=\frac{ax+(x+a)(x+c)}{ax-(x+a)(x+c)} \tag{8}$$

или

$$\frac{(x+a)(x+c)}{(a-c)x}=\frac{ax+(x+a)(x+c)}{ax-(x+a)(x+c)}.$$

Введем новое неизвестное y, положив

$$(x+a)(x+c)=xy, \tag{9}$$

получим:

$$\frac{y}{a-c}=\frac{a+y}{a-y},$$

откуда:

$$(a-y)y=(a-c)(a+y).$$

Из полученного квадратного уравнения определяем y и, наконец, определяем x из квадратного уравнения (9).

В) $a=c$. В этом случае знаменатель дроби, находящейся в левой части равенства (8), обращается в нуль-многочлен, а потому изложенный способ неприменим. Если $a=c$, то исходное уравнение принимает вид:

$$1=\frac{ax}{(x+a)^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2+ax+a^2}{(x+a)^2}=0.$$

Корни числителя суть:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{3}ai}{2}, \tag{10}$$

числитель и знаменатель имеют общий корень, если

$$\frac{-a \pm \sqrt{3}\,ai}{2} = -a, \quad \text{откуда} \quad a(1 \pm \sqrt{3}\,i) = 0$$

и, следовательно, $a = 0$. Но при $a = c = 0$ уравнение обращается в противоречивое соотношение $(1 = 0)$, а поэтому не имеет решений. Если $a = c \neq 0$, то формула (10) дает два корня данного уравнения.

§ 66. Понятие о проблеме исключения

Рассмотрим два многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Выясним условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0 и b_m, b_{m-1}, ..., b_1, b_0, чтобы данные многочлены имели хотя бы один общий корень. При соблюдении этого условия уравнения $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ будут иметь хотя бы одно общее решение.

Рассмотрим например два многочлена 1-й степени:

$$a_1 x + a_0 \text{ и } b_1 x + b_0 \text{ (где } a_1 \neq 0 \text{ и } b_1 \neq 0).$$

Первый двучлен имеет единственный корень $x = -\frac{a_0}{a_1}$, аналогично $x = -\frac{b_0}{b_1}$ есть единственный корень второго двучлена, следовательно, мы должны иметь $-\frac{a_0}{a_1} = -\frac{b_0}{b_1}$, откуда и получается искомое условие

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

При выполнении условия (1) уравнения $a_1 x + a_0 = 0$ и $b_1 x + b_0 = 0$ имеют один и тот же корень, так как их коэффициенты пропорциональны.

Теорема. *Многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общий корень (хотя бы один) в поле комплексных чисел тогда и только тогда, если их наибольший общий делитель есть многочлен степени не ниже первой.*

Доказательство. Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общий корень α, то они оба делятся на $x - \alpha$ и потому не являются взаимно простыми. Следовательно, их общий наибольший делитель $D(x)$ является многочленом не ниже первой степени. Обратно, если наибольший общий делитель $D(x)$ многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть многочлен степени не ниже 1-й, то из тождеств $f(x) = D(x) f_1(x)$ и $\varphi(x) = D(x) \varphi_1(x)$ вытекает, что всякий корень многочлена $D(x)$ является общим корнем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, ч. т. д.

Как известно, $D(x)$ (см. § 18) есть последний отличный от нуля остаток, который дает алгоритм Эвклида в применении к многочленам $f(x)$ и $\varphi(x)$. Применим алгоритм Эвклида к многочленам $f(x)$ и $\varphi(x)$,

заданным в общем виде. Степени последовательных остатков понижаются, пока не получится остаток, не содержащий x и выражающийся исключительно через коэффициенты данных многочленов. Обозначим этот последний остаток через $R(f, \varphi)$. Как известно, коэффициенты остатков выражаются рационально (при помощи четырех арифметических действий) через коэффициенты многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. Поэтому $R(f, \varphi)$ есть некоторое рациональное выражение относительно коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $b_m, b_{n-1}, \ldots, b_0$. Так как общий наибольший делитель определяется с точностью до числового множителя (не содержащего x), то и $R(f, \varphi)$ можно считать (освободив от знаменателей умножением на подходящие множители) целым рациональным выражением относительно коэффициентов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Выражение $R(f, \varphi)$ называется результантом многочленов

$$f(x) \text{ и } \varphi(x).$$

Теорема. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы два данные многочлена имели хотя бы один общий корень, является обращение в нуль их результанта.*

Доказательство. Общий наибольший делитель $D(x)$ имеет степень не ниже 1-й в том и только в том случае, когда последний остаток, к которому приводит алгоритм Эвклида, имеет степень не ниже 1-й, т. е. когда $R(f, \varphi) = 0$. Следовательно (в силу предыдущей теоремы), это есть необходимое и достаточное условие существования общего корня многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, ч. т. д.

Для примера вычислим результант R двух квадратных трехчленов

$$x^2 + px + q \text{ и } x^2 + p_1 x + q_1.$$

Применим алгоритм Эвклида:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + px + q & x^2 + p_1 x + q_1 \\ \underline{x^2 + p_1 x + q_1} & \overline{1} \\ r_1 = (p - p_1)x + (q - q_1). & \end{array}$$

Если $p \neq p_1$, то чтобы избежать дробей, умножаем второй многочлен на $p - p_1$ и делим на r_1:

$$\begin{array}{l|l} (p-p_1)x^2 + (p-p_1)p_1 x + q_1(p-p_1) & (p-p_1)x + (q-q_1) \\ \underline{(p-p_1)x^2 + (q-q_1)x} & \overline{x + [(p-p_1)p_1 - (q-q_1)]} \\ [(p-p_1)p_1 - (q-q_1)]x + q_1(p-p_1) & \\ (p-p_1)[(p-p_1)p_1 - (q-q_1)]x + q_1(p-p_1)^2 & \text{Умножаем на } p - p_1 \\ \underline{(p-p_1)[(p-p_1)p_1 - (q-q_1)]x + (q-q_1)[(p-p_1)p_1 - (q-q_1)]} & \\ r_2 = \text{const}. & \end{array}$$

Откуда:

$$R = q_1(p-p_1)^2 - (q-q_1)[(p-p_1)p_1 - (q-q_1)] = \\ = (q-q_1)^2 + (p-p_1)(q_1 p - p_1 q).$$

В процессе вычисления R мы умножали остатки два раза на $p-p_1$, что является незаконным, если $p=p_1$. В этом случае данные трехчлены принимают вид $x^2+px+q=0$ и $x^2+px+q_1=0$, и наличие общего корня возможно лишь, если $q=q_1$. Положив $p=p_1$, получим $R=(q-q_1)^2$ и при $q=q_1$ результант обращается в нуль. Следовательно, окончательный вывод справедлив и в случае $p=p_1$.

Существует несколько различных способов отыскания результанта. Поясним на примере двух квадратных трехчленов другой способ. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена x^2+px+q.

Если данные трехчлены имеют общий корень, то

$$(x_1^2+p_1x_1+q_1)(x_2^2+p_1x_2+q_1)=0. \tag{2}$$

В самом деле, по крайней мере один из сомножителей в левой части обращается в нуль, так как хотя бы одно из чисел x_1 или x_2 есть корень второго трехчлена. Обратно, если имеет место равенство (2), то по крайней мере один из сомножителей в левой части равен нулю, а потому хотя бы одно из чисел x_1 или x_2 есть корень второго трехчлена. Производя умножение, получим:

$$\begin{aligned}(x_1^2+p_1x_1+q_1)(x_2^2+p_1x_2+q_1) = x_1^2x_2^2+p_1x_1x_2(x_1+x_2)+\\ +q_1(x_1^2+x_2^2)+p_1^2x_1x_2+p_1q_1(x_1+x_2)+q_1^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Но симметрические функции корней первого трехчлена выражаются через его коэффициенты:

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q,\quad x_1^2+x_2^2=p^2-2q.$$

Подставляя в правую часть (3), получим выражение, совпадающее с найденным ранее выражением для результанта R.

Рассмотрим систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$f(x, y)=0 \text{ и } \varphi(x, y)=0,$$

где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ многочлены относительно двух аргументов x и y. Расположим многочлены $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ по степени одной буквы, например x, и запишем данные уравнения в виде:

$$\left.\begin{aligned}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0\\ b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0=0\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где коэффициенты суть некоторые многочлены относительно неизвестного y. Предположим, что $x=x_1$, $y=y_1$ есть решение данной системы. При $y=y_1$ уравнения (4) имеют общее решение $x=x_1$. Положим, в равенствах (4) $y=y_1$, тогда получим систему двух уравнений с числовыми коэффициентами, имеющих общий корень $x=x_1$. При составлении выражения для результанта двух многочленов данных степеней с произвольными числовыми коэффициентами при помощи алгоритма Эвклида каждый из старших коэффициентов a_n и b_m считается отличным от нуля (многочлены данных степеней). Поэтому следует различать два случая.

Случай 1°. Оба коэффициента a_n и b_m при $y=y_1$ отличны от нуля. В этом случае результант $R(y)$ многочленов f и φ (рассматриваемых как многочлены от аргумента x с коэффициентами, содержащими y) при $y=y_1$ должен обратиться в нуль. Обратно, если результант $R(y)$ при $y=y_1$ обращается в нуль, но $a_n\neq 0$ и $b_m\neq 0$, то уравнения (4) имеют общий корень $x=x_1$ (хотя бы один), и, следовательно, $x=x_1$, $y=y_1$ есть решение данной системы.

Случай 2°. При $y=y_1$ хотя бы один из старших коэффициентов равен нулю. Положив $y=y_1$, получим систему уравнений (с неизвестным x) с числовыми коэффициентами, причем степень хотя бы одного из этих уравнений „понижается". В этом случае надо непосредственно исследовать, имеют ли полученные уравнения общие корни. При этом следует пользоваться не результантом $R(y)$ уравнений (4), а результантом тех уравнений, которые получатся после подстановки $y=y_1$.

Общее правило решения системы уравнений формулируется следующим образом:

1° *составляем результант* $R(y)$ *уравнений* (4);

2° *находим корни уравнения*

$$R(y)=0; \tag{5}$$

3° *для каждого корня* $y=y_1$ *уравнения (5), для которого* $a_n\neq 0$ *и* $b_m\neq 0$, *находим соответствующие общие решения уравнений* (4);

4° *значения* y, *при которых* $a_n=0$ *или* $b_m=0$, *подлежат особому исследованию.*

Таким образом, для отыскания решения системы двух уравнений с двумя неизвестными следует найти корни уравнения $R(y)=0$. Уравнение (5) содержит одно неизвестное y, поэтому переход от системы

$$f(x, y)=0,\ \varphi(x, y)=0$$

к уравнению (5) называется исключением неизвестного x.

Можно доказать, *что степень результанта* $R(y)$ *в общем случае равна* (*в частных случаях может быть ниже*) *произведению степеней данных уравнений.*

Рассмотрим, например, систему уравнений второй степени:

$$\begin{aligned} x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F&=0,\\ x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1&=0 \end{aligned}$$

(коэффициент A при x^2 в обоих уравнениях считаем равным 1, так как если $A\neq 0$, всегда можно разделить обе части уравнения на этот коэффициент). Расположим уравнения по степеням x:

$$\left.\begin{aligned} x^2+x(By+D)+Cy^2+Ey+F&=0\\ x^2+x(B_1y+D_1)+C_1y^2+E_1y+F_1&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Чтобы исключить x, следует в выражении для результанта двух квадратных трехчленов

$$(q-q_1)^2+(p-p_1)(q_1p-p_1q)$$

положить

$$p = By + D, \quad q = Cy^2 + Ey + F,$$
$$p_1 = B_1 y + D_1, \; q_1 = C_1 y^2 + E_1 y + F_1.$$

Для определения y получим в общем случае уравнение 4-й степени. На практике обычно поступают следующим образом: вычитая почленно уравнения, получим уравнение 1-й степени относительно x. Из этого уравнения можно выразить x через y и, подставив в одно из данных уравнений, получить уравнение, не содержащее x. Из последнего уравнения определяем y, а затем находим соответствующие значения x.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 &= 74 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 &= 73 \end{aligned}\right\}$$

Решение. Умножаем 1-е уравнение на 2 и вычитаем почленно второе; получим $3y^2 = 75$, откуда $y = \pm 5$. Полагая в первом $y = 5$, получим:

$$x^2 + 5x - 24 = 0.$$

Откуда $x = 3$ и $x = -8$.
Полагая $y = -5$, получим $x^2 - 5x - 24 = 0$, откуда $x = 8$ и $x = -3$.
Решения системы суть:

$$x_1 = 3, \; y_1 = 5; \; x_2 = -8, \; y_2 = 5; \; x_3 = 8, \; y_3 = -5;$$
$$x_4 = -3, \; y_4 = -5.$$

§ 67. Частные приемы решения систем уравнений высших степеней

Пользование общим правилом исключения неизвестных посредством результанта на практике оказывается чрезвычайно громоздким. Поэтому при решении систем частного вида стараются не применять общей схемы исключения, а использовать специфические свойства рассматриваемой системы, позволяющие упростить процесс решения.

Примеры. 1. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y &= p \\ xy &= q \end{aligned}\right\}$$

Решение. Числа x и y суть корни квадратного уравнения

$$z^2 - pz + q = 0,$$

откуда:

$$z_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Система имеет два решения:

$$x = z_1, \; y = z_2 \text{ и } x = z_2, \; y = z_1.$$

2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x - y &= p \\ xy &= q \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Система приводится к предыдущей, если положить $-y=v$.

$$x+v=p,$$
$$xv=-q.$$

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^n+y^n&=p\\ xy&=q \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Возведем второе уравнение в степень n, тогда получим:

$$x^n+y^n=p,\ x^ny^n=q^n.$$

Пусть z_1 и z_2 корни квадратного уравнения

$$z^2-pz+q^n=0,$$

тогда можно положить:

$$x^n=z_1,\ y^n=z_2,\ \text{или}\ x^n=z_2,\ y^n=z_1.$$

Следовательно,

$$x=\sqrt[n]{z_1},\ y=\sqrt[n]{z_2} \tag{1'}$$

или

$$x=\sqrt[n]{z_2},\ y=\sqrt[n]{z_1}. \tag{1''}$$

Взяв какое-нибудь значение для $\sqrt[n]{z_1}$ и положив, например, $x=\sqrt[n]{z_1}$, мы не можем для y взять произвольное значение корня, ибо значения x и y связаны соотношением $xy=q$, которое единственным образом определит соответствующее значение для y (см., например, решение кубического уравнения). Таким образом, для каждого из n значений $\sqrt[n]{z_1}$ определяется единственное значение второго корня. Система имеет $2n$ решений (1') и (1'').

4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^n+y^n&=a\\ x^n-y^n&=b \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Складывая и вычитая данные уравнения, получим;

$$x^n=\frac{a+b}{2},\quad y^n=\frac{a-b}{2},$$

откуда

$$x=\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}},\ y=\sqrt[n]{\frac{a-b}{2}}.$$

Система имеет n^2 решений, которые получим, комбинируя всеми возможными способами n значений для x и n значений для y.

5. Решить систему

$$x^2-y^2=a,\ x+y=b.$$

Р е ш е н и е. Система приводится к системе 1-й степени. В самом деле, переписав первое уравнение в виде $(x+y)(x-y)=a$ и воспользовавшись вторым, заменим данную систему системой уравнений 1-й степени:

$$b(x-y)=a,\ x+y=b.$$

Если $\begin{vmatrix} b & -b\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2b\neq 0$, то система имеет единственное решение. Если $b=0$, то при $a\neq 0$ система противоречива. Если $a=b=0$, то система имеет бесконечное множество решений, ей удовлетворяет любая пара чисел x и y, взятых при условии $x=-y$.

6. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^n+y^n&=a\\ x+y&=b \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим случаи $n=2$, $n=3$, $n=4$.

a) $n=2$. Имеем $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

Положим $u=x+y$, $t=xy$, тогда система перепишется в виде:

$$u^2-2t=a,\quad u=b.$$

Подставляя в первое значение u, получим:

$$t=\frac{b^2-a}{2},$$

система приводится к уже рассмотренной:

$$x+y=b,\ xy=\frac{b^2-a}{2}.$$

b) $n=3$. Имеем

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=u[u^2-3t].$$

Система принимает вид

$$u[u^2-3t]=a;\quad u=b. \tag{2}$$

Эта система решается подобно предыдущей.

При $b\neq 0$ из 1-го уравнения находим единственное значение для t. Если $b=0$, но $a\neq 0$, то система (2) (а следовательно, и данная система) противоречива. Если $a=b=0$, то данная система принимает вид $x^3+y^3=0$, $x+y=0$, ей удовлетворяет любая пара чисел x и y, взятых при условии $x=-y$.

c) $n=4$. Имеем:

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=(u^2-2t)^2-2t^2.$$

Данная система может быть переписана в виде:

$$(u^2-2t)^2-2t^2=a,\ u=b.$$

Откуда (подставляя в первое $u=b$) для определения t получаем квадратное уравнение

$$2t^2-4b^2t+b^4-a=0.$$

Если дискриминант $\Delta=2(b^4+a)\neq 0$, то квадратное уравнение имеет два решения

$$t=t_1 \text{ и } t=t_2,$$

откуда получим две системы:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=b\\ xy&=t_1 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} x+y&=b\\ xy&=t_2 \end{aligned}\right\},$$

каждая из которых дает по два решения.

Если $\Delta=0$, то $a=-b^4$, квадратное уравнение имеет двойной корень $t=b^2$ и для определения x и y получаем систему уравнений

$$x+y=b,\ xy=b^2.$$

Следовательно, x и y являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-bz+b^2=0.$$

7. Решить систему

$$(x^2+y^2)(x-y)=447,\quad xy(x-y)=210.$$

Р е ш е н и е. Полагаем $x-y=v$, $xy=t$, имеем

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=v^2+2t.$$

В новых неизвестных система принимает вид:

$$(v^2+2t)\,v=447,\quad tv=210.$$

Воспользовавшись вторым уравнением, получим:

$$(v^2+2t)\,v=v^3+2tv=v^3+420=447,$$

откуда

$$v^3=27$$

и $v_1=3$, $v_2=3\varepsilon$, $v_3=3\varepsilon^2$ (ε и ε^2 — кубические мнимые корни из 1), из второго уравнения получим соответственно

$$t_1=70,\ t_2=\frac{210}{3\varepsilon}=70\varepsilon^2 \text{ и } t_3=70\varepsilon.$$

Возьмем первое решение $v_1=3$, $t_1=70$; для определения x и y получим $x-y=3$, $xy=70$, следовательно, x и $-y$ суть корни квадратного уравнения

$$z^2-3z-70=0,$$

откуда

$$z_1=10 \text{ и } z_2=-7.$$

Следовательно,

$$x_1=10,\ y_1=7 \text{ и } x_2=-7,\ y_2=-10$$

суть два решения системы. Поступая аналогично с решениями u_2, v_2 и u_3, v_3 вспомогательной системы, найдем 4 мнимые решения данной системы.

8. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)&=a\\ \varphi(x,y)&=b\end{aligned}\right\},$$

где $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ — однородные многочлены одной и той же степени n и по крайней мере одно из чисел a или b отлично от нуля.

Р е ш е н и е. Введем новое неизвестное, положив $y=tx$, тогда система перепишется следующим образом:

$$x^n f(1,t)=a,\quad x^n\varphi(1,t)=b, \tag{3}$$

где n — степень данных многочленов. Этой системе не может удовлетворять значение неизвестного $x=0$. Умножив первое уравнение на b, а второе на a, после полученного вычитания и сокращения на x^n получим уравнение с одним неизвестным t:

$$bf(1,t)-a\varphi(1,t)=0.$$

Для каждого корня этого уравнения соответствующие значения x и y можно определить, воспользовавшись одним из уравнений (3) и соотношением $y=tx$. Рассмотрим, например, систему уравнений:

$$x^3+y^3=1;\ x^2y+2xy^2+y^3=2.$$

Полагая $y=tx$, получим:

$$x^3(1+t^3)=1,\quad x^3(t+2t^2+t^3)=2, \tag{4}$$

откуда:

$$2x^3(1+t^3)=x^3(t+2t^2+t^3).$$

Сокращая на x^3, получим:

$$t^3-2t^2+t+2=0,$$

или

$$(t+1)(t-1)(t-2)=0.$$

Корни последнего уравнения суть:

$$t_1=-1,\ t_2=1,\ t_3=2.$$

При $t=-1$ система (4) противоречива.

При $t=1$ из первого уравнения (4) получим:

$$2x^3=1$$

и

$$x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\qquad x_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\qquad x_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}$$

и соответственно

$$y_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\qquad y_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\qquad y_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}.$$

При $t=2$ получим:

$$9x^3=1,$$

откуда:

$$x_4=\frac{1}{\sqrt[3]{9}},\qquad x_5=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\qquad x_6=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}}$$

и соответственно:

$$y_4=\frac{2}{\sqrt[3]{9}},\qquad y_5=\frac{2\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\qquad y_6=\frac{2\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}}.$$

Если $a=b=0$, то данная система называется однородной. Всякая однородная система имеет тривиальное решение $x=y=0$. Положив $y=tx$, из системы

$$x^n f(1, t)=0,\quad x^n\varphi(1, t)=0$$

найдем решение $x=0$, что дает тривиальное решение. Нетривиальные решения могут получиться, если два уравнения

$$f(1, t)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(1, t)=0$$

имеют хотя бы один общий корень. Если t_1 — общий корень этих уравнений, то данная система имеет бесконечное множество нетривиальных решений: ей удовлетворяет любая пара чисел $x, y=t_1 x$ (при произвольном значении x).

9. Решить систему

$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2-z^2=20,\quad x^4+y^4-z^4=560.$$

Решение. Из первого уравнения находим $x+y=-z$. Из второго получим

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20+z^2$$

или

$$z^2-2xy=20+z^2,$$

откуда

$$xy=-10.$$

Из третьего имеем

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=560+z^4,$$

В силу предыдущих соотношений

$$(20+z^2)^2-200=560+z^4,$$

или

$$40z^2=360,$$

откуда:

$$z=\pm 3.$$

Из первого уравнения получим:

$$x+y=\mp 3=-z.$$

Присоединяя уравнение $xy=-10$, найдем:

$$x_1=5,\ y_1=-2,\ z_1=-3;\ x_2=-2,\ y_2=5,\ z_2=-3;$$
$$x_3=-5,\ y_3=2,\ z_3=3;\ x_4=2,\ y_4=-5,\ z_4=3.$$

§ 68. Понятие о решении иррациональных уравнений

Уравнение $f(x)=0$ называется иррациональным, если его левая часть является алгебраической иррациональной функцией, т. е. функцией, содержащей радикалы *.

Предположим для определенности, что $f(x)$ содержит лишь один радикал $\sqrt[n]{R(x)}$, где $R(x)$ есть некоторое рациональное выражение, содержащее неизвестное. Рассмотрим уравнение вида $F\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)=0$, где $F(x, y)$ многочлен относительно аргументов x и y:

$$f(x)=F\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right).$$

В поле комплексных чисел задача решения данного уравнения ставится следующим образом:

Найти значения x, при которых хотя бы одно из значений корня $\sqrt[n]{R(x)}$ удовлетворяет условию

$$F\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)=0. \qquad (1)$$

Введем новое неизвестное, положив $y=\sqrt[n]{R(x)}$, тогда данное уравнение можно заменить системой уравнений

$$F(x, y)=0,\quad y^n=R(x).$$

Исключая y (см. § 66), получим уравнение, не содержащее радикалов, и задача сводится к решению уравнения с одним неизвестным. Если уравнение содержит несколько радикалов, то их можно исключить последовательно.

Если мы не считаем допустимыми все возможные значения для корня, то процесс исключения радикала может внести посторонние решения. В самом деле, уравнению (1) могут удовлетворять значения корня, не являющиеся допустимыми. В этом смысле говорят, что освобождение уравнения от радикалов приводит в общем случае к уравнению, неэквивалентному данному, а потому всякий раз требуется

* Речь идет лишь о явных алгебраических функциях.

проверка корней. Так, например, при решении иррационального уравнения, содержащего квадратный радикал $\sqrt{R(x)}$ в поле действительных чисел, обычно под $\sqrt{R(x)}$ подразумевают арифметическое (т. е. неотрицательное) значение корня. Уравнение, освобожденное от радикала, наряду с решениями данного уравнения содержит решения уравнения, получающегося из данного заменой $\sqrt{R}$ на $-\sqrt{R}$. Эти посторонние решения должны быть устранены проверкой.

Заметим, что на практике нередко бывает возможно освободить уравнение от радикалов последовательным возведением обеих его частей в степень.

Примеры: 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}=7-x.$$

Решение. Считаем допустимыми для x и для радикала любые комплексные значения. Полагая $\sqrt{x-1}=y$, получим систему:

$$y=7-x,\quad y^2=x-1.$$

Подставляя y из первого во второе, исключаем радикал и получаем квадратное уравнение:

$$x^2-15x+50=0. \tag{2}$$

Откуда:

$$x=5 \text{ и } x=10.$$

При $x=5$ имеем $y=2$, т. е. значение радикала следует взять равным числу 2.

При $x=10$ имеем $y=-3$, т. е. значение радикала следует взять равным числу -3.

Решим то же уравнение в поле действительных чисел, считая для радикала $\sqrt{x-1}$ допустимыми лишь неотрицательные значения. При этом условии для уравнения получится лишь одно решение $x=5$, тогда как $x=10$ есть постороннее решение, принадлежащее уравнению

$$-\sqrt{x-1}=7-x.$$

Практически для получения уравнения (2) достаточно возвести в квадрат обе части данного уравнения.

2. Решить уравнение

$$x^3-216=19x\sqrt{x}$$

в поле комплексных чисел. Полагая $\sqrt{x}=y$, т. е.

$$y^2=x,$$

получим систему:

$$x^3-216=19xy;\quad y^2=x,$$

откуда:

$$y^6-19y^3-216=0.$$

Решая последнее уравнение, находим $y^3=27$ и $y^3=-8$, и, следовательно,

$$y_1=3,\ y_2=3\varepsilon,\ y_3=3\varepsilon^2,\ y_4=-2,\ y_5=-2\varepsilon,\ y_6=-2\varepsilon^2;$$
$$x_1=9,\ x_2=9\varepsilon^2,\ x_3=9\varepsilon,\ x_4=4,\ x_5=4\varepsilon^2,\ x_6=4\varepsilon$$

(где ε и ε^2 — мнимые кубические корни из единицы). Здесь в нижней строчке выписаны все 6 решений данного уравнения, а в верхней — соответствующие значения радикала.

При решении этого уравнения в поле действительных чисел ставится условие $\sqrt{x}=y>0$. Этому условию удовлетворяет только первое решение $x=9$, являющееся единственным корнем уравнения в поле действительных чисел.

3. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b} \quad (\text{где } a>0 \text{ и } b>0)$$

в поле действительных чисел (считая значения радикалов арифметическими).

Р е ш е н и е. Образуем производную пропорцию:

$$\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}+1} \tag{3}$$

заметим, что $x=-a$ не есть решение данного уравнения).

Возводя в квадрат, получим:

$$\frac{a-x}{a+x}=\frac{1-2\sqrt{b}+b}{1+2\sqrt{b}+b}.$$

Образуем снова производную пропорцию:

$$\frac{x}{a}=\frac{2\sqrt{b}}{1+b},$$

откуда единственное возможное решение

$$x=\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}.$$

При $b<1$ уравнение не имеет решений. В самом деле, если $b<1$, то левая часть уравнения (3) отрицательна, а правая не может быть отрицательной. При $b\geqslant 1$ найденное значение удовлетворяет уравнению (3) (а также и исходному уравнению):

$$\frac{\sqrt{a-\frac{2a\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}}}{\sqrt{a+\frac{2a\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{1+b-2\sqrt{b}}}{\sqrt{a}\sqrt{1+b+2\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{b}-1}{1+\sqrt{b}}.$$

Итак, уравнение имеет единственное решение при $b\geqslant 1$ и не имеет решений при $b<1$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{4a^3+x}+\sqrt[3]{4a^3-x}=2a$$

в поле действительных чисел.

Р е ш е н и е. Запишем данное уравнение в виде:

$$R+R_1=2a. \tag{4}$$

Возведем обе части в куб:

$$R^3+R_1^3+3RR_1(R+R_1)=8a^3.$$

Подставим выражения для R и R_1 и воспользуемся данным соотношением (4):

$$(4a^3+x)+(4a^3-x)+3\sqrt[3]{16a^6-x^2}\cdot 2a=8a^3,$$

откуда

$$6a\sqrt[3]{16a^6-x^2}=0.$$

Следовательно,

$$16a^6-x^2=0 \quad \text{и} \quad x=\pm 4a^3.$$

Подстановкой убеждаемся, что найденные значения удовлетворяют данному уравнению.

Глава VI

НЕРАВЕНСТВА

§ 69. Основные теоремы

Учение о неравенствах основывается на характеристических свойствах неравенств и на законах монотонности арифметических действий. Разумеется, что учение о неравенствах относится лишь к расположенным числовым полям (например, поле рациональных чисел или действительных чисел), в которых определены понятия „больше", „меньше", „равно"; к полю же комплексных чисел оно не применимо. Напомним основные свойства неравенств и отметим важнейшие следствия из них.

1° *Из неравенства* $A<B$ *следует неравенство* $B>A$ *и обратно — из второго неравенства следует первое* (свойство необратимости, § 3). Это свойство можно формулировать в виде следующего ***правила:*** *При перестановке правой и левой частей неравенства смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

2° *Из* $A<B$ *и* $B<C$ *следует* $A<C$ (свойство транзитивности, § 3).

3° *Если* $A<B$, *то*:

$$B-A>0$$

и обратно — из второго неравенства следует первое (см. § 7).

4° *Если* $A<B$, *то* $A+C<B+C$
(свойство монотонности сложения, см. § 7).

Отсюда ***правило:*** *К обеим частям неравенства можно прибавить поровну.*

5° *Если* $A<B$ *и* $C<D$, *то* $A+C<B+D$ (см. § 7).

Отсюда ***правило:*** *Неравенства одинакового смысла можно складывать почленно.*

6° *Если* $A<B$, то $Am<Bm$, *при* $m>0$ и $Am>Bm$, *при* $m<0$.

Доказательство. По условию имеем $B-A>0$, следовательно:

$$Bm-Am=(B-A)m\begin{cases}>0 \text{ (если } m>0)\\ <0 \text{ (если } m<0)\end{cases}$$

ч. т. д.

Отсюда ***правило:*** *При умножении обеих частей неравенства на положительный множитель смысл знака неравенства не меняется, а при умножении на отрицательный множитель смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

7° В частности при $m=-1$ получим:
если $A<B$, *то:*

$$-A>-B.$$

Правило: *При изменении знака обеих частей неравенства смысл знака неравенства изменяется на противоположный.*

8° Если $A<B$ и $C>D$, то:

$$A-C<B-D. \tag{1}$$

Доказательство. По свойству 7° имеем $-C<-D$, складывая почленно с неравенством $A<B$, получим (1), ч. т. д.

Правило: *Неравенства противоположного смысла можно вычитать почленно.*

9° Если $A<B$ и $C<D$, где A, B, C и D положительные числа, то:

$$AC<BD.$$

Доказательство см. в § 7.

Правило: *Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно перемножать.*

Примечание. Если A, B, C и D отрицательны, то:

$$-A>-B \text{ и } -C>-D,$$

откуда:

$$AC>BD,$$

следовательно, при почленном перемножении смысл знака неравенства изменяется на противоположный. При перемножении неравенств с произвольными числами A, B, C и D могут представиться разнообразные случаи. Так, например, $-2<4$ и $-2<3$; имеем $(-2)(-2)<4\cdot 3$. С другой стороны, $-4<2$ и $-6<1$; но в данном случае $(-4)(-6)>2\cdot 1$.

10° Из 9° следует, что *если* $A<B$, *где* A *и* B *положительные числа, то* $A^n<B^n$ (n — натуральное число).

Правило: *Обе части неравенства с положительными членами можно возвести в одну и ту же степень.*

11° *Если* $A<B$ *и числа* A *и* B *одного знака, то:*

$$\frac{1}{A}>\frac{1}{B}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B-A}{AB}>0;$$

так как $B-A>0$ и $AB>0$, ибо A и B числа одного знака, ч. т. д.

Примечание. Для чисел разных знаков свойство 11° не имеет места.

§ 70. Задание числовых и точечных множеств при помощи неравенств

Во многих случаях неравенства могут служить средством аналитического задания числовых и точечных множеств.

Разумеется, речь идет не о произвольных, а о некоторых частного вида множествах, наиболее важных в приложениях.

Числовые промежутки. Пусть a и b — произвольные действительные числа, взятые при условии $a<b$.

Определение. 1° *Интервалом* (a,b) *называется множество всех действительных чисел* x, *удовлетворяющих неравенствам:*

$$a<x<b.$$

2° *Сегментом* $[a, b]$ *называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам:*

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

Геометрически интервал (a, b) изображается на числовой прямой множеством точек, лежащих между точками a и b, т. е. отрезком с концами в точках a и b, при этом сами концы исключаются

Черт. 53.

Черт. 54.

(черт. 53). Сегмент $[a, b]$ геометрически изображается отрезком с концами в точках a и b, причем сами концы a и b включаются в отрезок (черт. 54).

В целях единообразия терминологии и обозначений вводятся в рассмотрение „бесконечные" интервалы посредством следующих дополнительных определений.

1° *Множество всех действительных чисел называется интервалом от* $-\infty$ *(минус бесконечности) до* ∞ *(бесконечности) и обозначается символом* $(-\infty, \infty)$.

2° *Множество всех действительных чисел, больших (меньших) числа* a, *называется интервалом от* a *до* ∞ *(или от* $-\infty$ *до* a*) и обозначается символом* (a, ∞) *или* $(-\infty, a)$ (черт. 55).

Символы ∞ и $-\infty$ не следует рассматривать как числа; никакие арифметические операции над этими символами не считаются допустимыми. Принято символы $-\infty$ и ∞ считать связанными с дей-

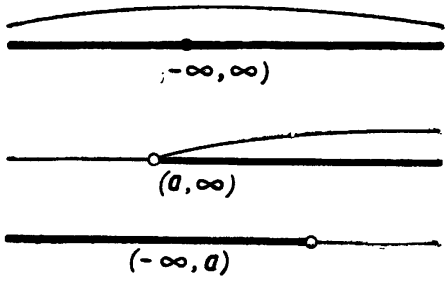
ствительными числами и между собой соотношениями неравенств, именно: *всякое действительное число a считается меньшим чем ∞ и большим чем $-\infty$, a $-\infty$ считается меньшим чем ∞*:

$$-\infty < a < \infty.$$

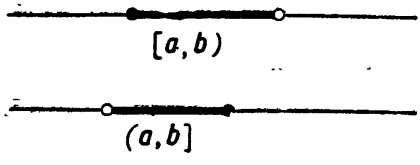
В силу этого соглашения множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам:

$$-\infty < x < \infty, \quad a < x < \infty, \quad -\infty < x < a,$$

соответственно суть множество всех действительных чисел, т. е. $(-\infty, \infty)$; множество всех действительных чисел, больших a, т. е. (a, ∞), и множество всех действительных чисел, меньших a, т. е. $(-\infty, a)$.



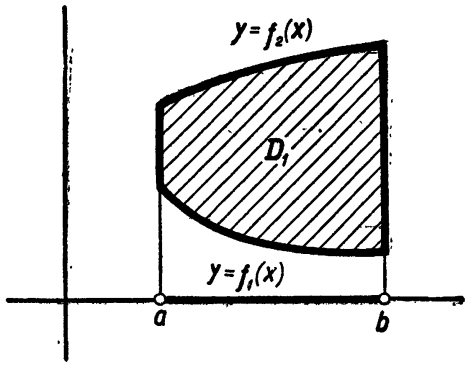
Черт. 55.



Черт. 56.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, называется полусегментом $[a, b)$, а множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$, называется полуинтервалом $(a, b]$ (черт. 56).

Все рассмотренные виды интервалов сегментов, полусегментов и полуинтервалов (конечных и бесконечных) объединяются общим термином „промежуток".



Черт. 57.

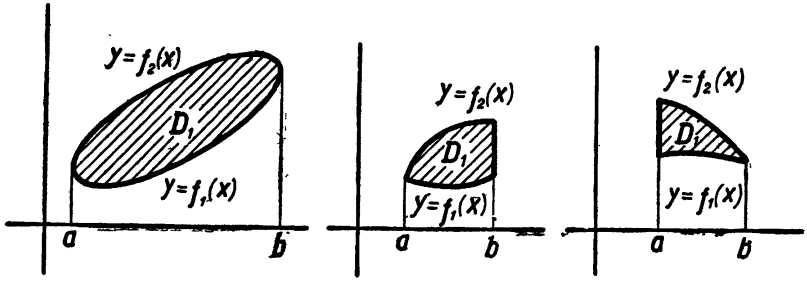
Элементарные области на плоскости. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ две функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству $f_1(x) < f_2(x)$ в интервале (a, b). Рассмотрим множество точек $X(x, y)$ плоскости, содержащихся внутри фигуры, ограниченной снизу линией $y = f_1(x)$, сверху линией $y = f_2(x)$, слева и справа параллелями оси ординат $x = a$ и $x = b$ (черт. 57). Линии, ограничивающие данную фигуру, к рассматриваемому множеству не причисляются.

Аналитически это множество можно характеризовать следующими неравенствами:

$$a < x < b, \quad f_1(x) < y < f_2(x), \qquad (D_1)$$

которым удовлетворяют координаты принадлежащих ему точек. В самом деле, при любом данном x, содержащемся в интервале (a, b), значения y содержатся между числами $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Примечание. Входящие в состав границы боковые отрезки могут (один или оба) выродиться в точку; так будет, если верхняя и нижняя дуги имеют общие концы (один или оба) (черт. 58).



Черт. 58.

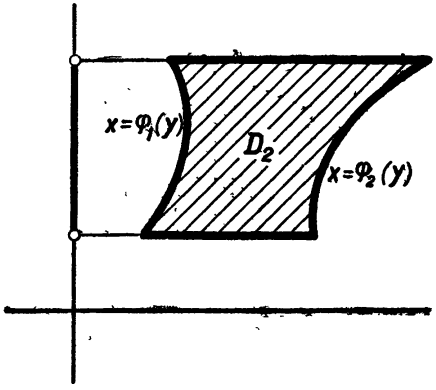
Аналогично, неравенствами:

$$c < y < d, \quad \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y) \qquad (D_2)$$

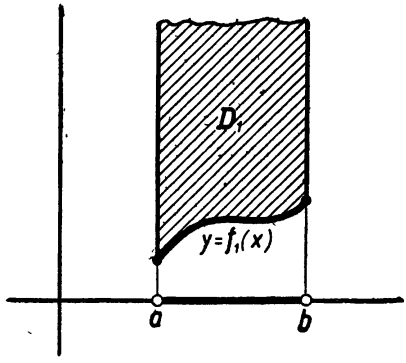
характеризуется множество точек плоскости, лежащих внутри фигуры, ограниченной слева и справа линиями

$$x = \varphi_1(y) \text{ и } x = \varphi_2(y) \text{ (соответственно),}$$

а снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ (черт. 59).



Черт. 59.



Черт. 60.

Неравенствами

$$a < x < b, \quad f_1(x) < y < \infty$$

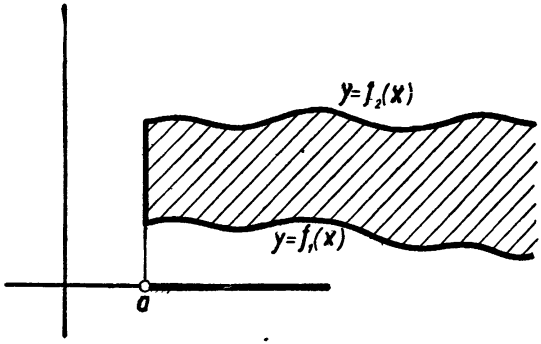
определяется фигура, ограниченная снизу линией $y = f_1(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $y = b$ (черт. 60).

Неравенства

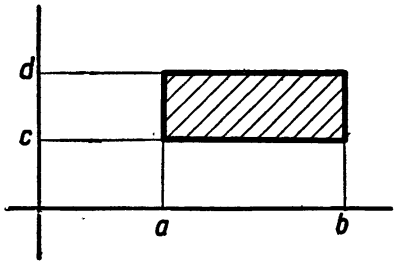
$$a < x < \infty, \quad f_1(x) < y < f_2(x)$$

определяют фигуру, изображенную на чертеже 61.

Предлагаем учащимся рассмотреть прочие возможные случаи неравенств, в которых участвуют символы $-\infty$ и ∞.



Черт. 61.



Черт. 62.

Определение. *Будем называть элементарной областью (открытой) множество точек плоскости, определяемое неравенствами вида:*

$$a < x < b, \quad f_1(x) < y < f_2(x) \qquad (D_1)$$

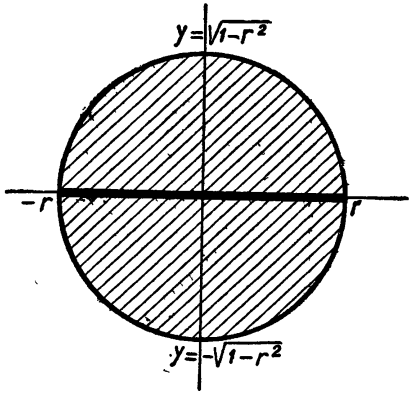
или

$$c < y < d, \quad \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y). \qquad (D_2)$$

Множество точек, получающееся присоединением к элементарной области ограничивающих ее линий, называется замкнутой элементарной областью.

Примечание. В неравенствах, определяющих элементарные области, могут участвовать символы $\pm\infty$.

Для получения неравенств, определяющих замкнутую элементарную область, достаточно в неравенствах, определяющих соответствующую область (открытую), заменить знаки „$<$“ знаками „$\leqslant$“ (за исключением, разумеется, знаков, относящихся к символам $\pm\infty$).



Черт. 63.

Примеры.

1. Неравенства $a < x < b$; $c < y < d$ определяют множество точек, лежащих внутри прямоугольника. Неравенства $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ определяют соответствующий замкнутый прямоугольник (черт. 62).

2. Множество точек, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = r^2$, определяется неравенствами

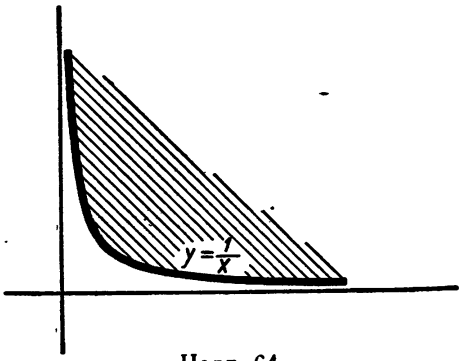
$$-r < x < r, \quad -\sqrt{1-r^2} < y < \sqrt{1-r^2}$$

(черт. 63).

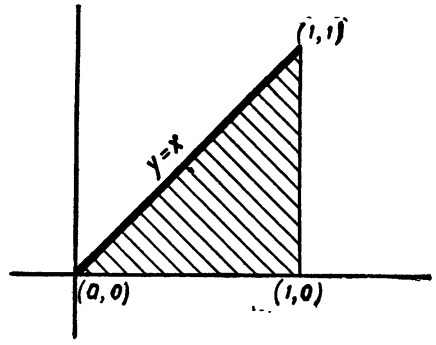
3. Неравенства

$$0 < x < \infty, \quad \frac{1}{x} \leqslant y < \infty$$

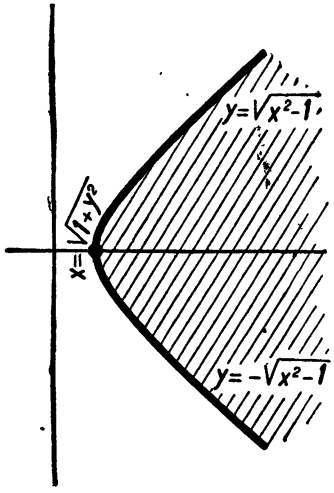
определяют замкнутую область, образованную точками, лежащими в первом квадранте, выше гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и на самой гиперболе (черт. 64). Эти неравенства короче можно записать так: $0 < x, \ \frac{1}{x} \leqslant y$.



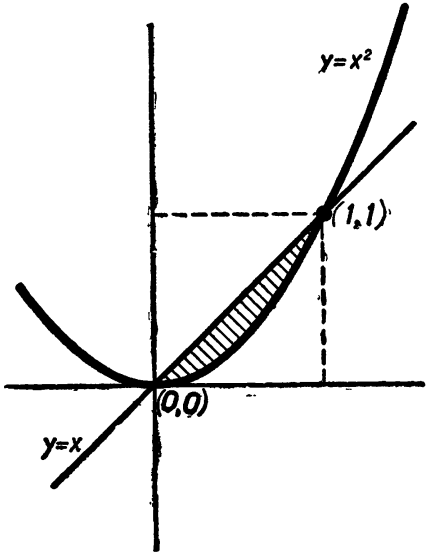
Черт. 64.



Черт. 65.



Черт. 66.



Черт. 67.

4. Неравенства

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x$$

определяют изображенный на чертеже 65 треугольник (замкнутый). Этот же треугольник может быть задан посредством неравенств

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad y \leqslant x \leqslant 1.$$

5. Неравенства

$$1 < x, \quad -\sqrt{x^2-1} < y < \sqrt{x^2-1}$$

определяют область, ограниченную правой ветвью гиперболы $x^2-y^2=1$ (черт. 66). Эта же область может быть задана неравенствами

$$-\infty<y<\infty, \quad \sqrt{1+y^2}<x<\infty.$$

6. Рассмотрим область, ограниченную сверху прямой $y=x$, а снизу параболой $y=x^2$ (черт. 67). Прямая и парабола пересекаются в двух точках (0, 0) и (1, 1). Рассматриваемая область может быть задана неравенствами

$$0<x<1, \quad x^2<y<x$$

или

$$0<y<1, \quad y<x<\sqrt{y}.$$

§ 71. Решение неравенств

Решить неравенство

$$f(x)<\varphi(x) \tag{1}$$

значит найти все те допустимые численные значения неизвестного x, при которых значение функции $f(x)$ меньше значения $\varphi(x)$.

Множество допустимых значений для неизвестного x предполагается заданным.

Аналогично, решение системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, \ldots)<\varphi_1(x, y, \ldots) \\ f_2(x, y, \ldots)<\varphi_2(x, y, \ldots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x, y, \ldots)<\varphi_k(x, y, \ldots) \end{array}\right\} \tag{2}$$

заключается в отыскании всевозможных допустимых систем численных значений для неизвестных $x, y, \ldots$, при которых справедливы все неравенства системы (2). Мы видим, что постановка вопроса о решении неравенства (или системы неравенств) аналогична постановке вопроса о решении уравнения.

Во многих случаях (но, разумеется, не во всех) множество решений данного неравенства (или системы) с одним неизвестным состоит из одного или нескольких числовых промежутков. Аналогично для неравенств с двумя (или большим числом) неизвестными множество решений может состоять из одной или нескольких элементарных областей. В этом случае (наиболее важном в приложениях) *под решением неравенства (или системы) подразумевают установление неравенств, определяющих промежутки и области, в которых удовлетворяется данное неравенство (или система).*

Таким образом (в рассматриваемом случае), данные неравенства (одно или система) заменяются неравенствами, характеризующими все те промежутки или элементарные области, в которых выполняются данные неравенства.

Понятие эквивалентности, данное в § 62 применительно к уравнениям, распространяется и на неравенства.

Остается в силе также и общая теорема об эквивалентности: *если каждое из двух данных неравенств (или систем) может быть получено как следствие другого, то эти неравенства (системы) эквивалентны.*

Теорема. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестных, то получится неравенство, эквивалентное данному.*

Доказательство. Прибавляя к обеим частям неравенства

$$f(x) < \varphi(x) \tag{1}$$

выражение $\omega(x)$, получим, как следствие, неравенство

$$f(x) + \omega(x) < \varphi(x) + \omega(x). \tag{3}$$

Если к обеим частям (3) прибавить $-\omega(x)$, то в качестве следствия получится неравенство (1), ч. т. д.

Доказательство не отличается от доказательства соответствующей теоремы, относящейся к уравнениям.

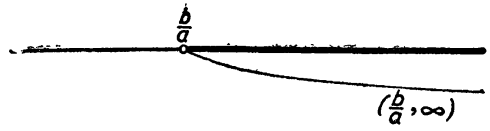
Следствие. Любое слагаемое можно из одной части неравенства перенести в другую с обратным знаком.

Теорема об умножении обеих частей уравнения на одно и то же выражение может быть применена и к неравенствам, но со следующим изменением: *множитель* $\omega(x)$ *при всех допустимых значениях неизвестного должен иметь один и тот же знак и не должен обращаться в нуль; если* $\omega(x) > 0$, *то при умножении обеих частей неравенства на* $\omega(x)$ *смысл знака неравенства сохраняется, если же* $\omega(x) < 0$, *то смысл знака неравенства меняется на противоположный.*

§ 72. Неравенства 1-й степени с одним неизвестным

Неравенство первой степени после переноса членов, содержащих неизвестное, в одну часть, а числовых слагаемых — в другую, принимает один из следующих видов: $ax < b$, либо $ax > b$ (множеством допустимых значений неизвестного примем множество всех действительных чисел). Для определенности остановимся на первом случае.

Черт. 68.



Черт. 69.

Если $a > 0$, то делением обеих частей неравенства $ax < b$ на a получим $x < \frac{b}{a}$. Следовательно, решением неравенства является любое число x, меньшее, чем $\frac{b}{a}$. Множество всех решений есть интервал $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ (черт. 68).

Если $a < 0$, то разделив обе части на a и изменив смысл знака неравенства, получим $x > \frac{b}{a}$. Множество всех решений есть интервал $\left(\frac{b}{a}, \infty\right)$ (черт. 69).

Если $a=0$, то при $b>0$ неравенство удовлетворяется тождественно произвольным действительным значением x. При $b\leqslant 0$ и $a=0$ данное неравенство противоречиво и не имеет решений.

Примеры.

1. Решить неравенство

$$2-3x<14-5x.$$

Решение. Перенося члены, содержащие x, в левую часть, а не содержащие x — в правую, получим:

$$5x-3x<14-2 \quad \text{или} \quad 2x<12,$$

откуда

$$x<6 \quad \text{(т. е. интервал } (-\infty, 6)).$$

2. Решить неравенство

$$\frac{37-2x}{3}+9\leqslant\frac{3x-8}{4}-x.$$

Решение.

Умножая обе части на 12, получим:

$$148-8x+108\leqslant 9x-24-12x,$$

или

$$256-8x\leqslant -3x-24,$$

откуда:

$$-5x\leqslant -280 \text{ и } x\geqslant 56.$$

3. Рещить неравенство

$$2(x-1)-x>3(x-1)-2x-5.$$

Решение. Имеем:

$$x-2>x-8.$$

По сокращении получим неравенство $-2>-8$, верное при всех значениях x.

Данное неравенство, как эквивалентное полученному, имеет решением любое значение x.

4. Рещить неравенство

$$2x-2<(x-3)-(5-x).$$

Решение. Имеем:

$$2x-2<2x-8 \quad \text{или} \quad -2<-8.$$

Следствием является неверное соотношение. Значит, данное неравенство не имеет решений.

Рассмотрим систему неравенств 1-й степени с одним неизвестным. Пусть, например, дана система двух неравенств

$$\left.\begin{aligned} ax+b&<cx+d\\ a_1x+b_1&<c_1x+d_1\end{aligned}\right\}$$

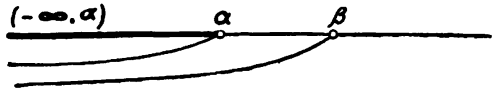
Решая каждое неравенство в отдельности, можно заменить данную систему системой простейших неравенств. В зависимости от коэффициентов могут получиться либо два неравенства одинакового смысла

$$1^\circ\ \left.\begin{aligned} x&<\alpha\\ x&<\beta\end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad 2^\circ\ \left.\begin{aligned} x&>\alpha\\ x&>\beta\end{aligned}\right\},$$

либо неравенства противоположного смысла

$$3^\circ\ \left.\begin{matrix} x>\alpha \\ x<\beta \end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad 4^\circ\ \left.\begin{matrix} x<\alpha \\ x>\beta \end{matrix}\right\}$$

В случае 1° возьмем меньшее из чисел α и β. Положим для определенности, что $\alpha<\beta$, тогда обоим неравенствам удовлетворяет любое число, меньшее α. Мы получаем интервал $(-\infty, \alpha)$, являющийся общей частью двух интервалов $(-\infty, \alpha)$ и $(-\infty, \beta)$ (черт. 70). Ана-



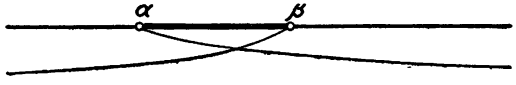
Черт. 70.

Черт. 71.

логично в случае 2° получим $x>\beta$ (для определенности считаем $\alpha<\beta$ (черт. 71). В случае 3° обоим неравенствам удовлетворяет любое число, содержащееся между α и β:

$$\alpha<x<\beta.$$

Интервал (α, β) является общей частью двух бесконечных интервалов (α, ∞) и $(-\infty, \beta)$ (черт. 72). В случае 4° система не имеет решений, так так (при $\alpha<\beta$) не существует ни одного числа, большего, чем β, но меньшего, чем α. В рассматриваемом случае интервалы $(-\infty, \alpha)$ и (β, ∞) не имеют общих точек (черт. 73).



Черт. 72.

Черт. 73.

Аналогично исследуются системы 1-й степени, состоящие из 3 или большего числа неравенств (см. пример 4).

Примеры: 1. Решить систему неравенств

$$\left.\begin{matrix} 3+x>4+2x \\ 5x-3<4x-1 \end{matrix}\right\}$$

Решение. Решаем первое неравенство:

$$x-2x>4-3,$$

откуда $x<-1$. Аналогично решая второе неравенство, получим $x<2$. Итак, должны выполняться следующие два неравенства: $x<-1$ и $x<2$, что будет иметь место, если $x<-1$.

2. Решить систему

$$\left.\begin{matrix} 3+x\leqslant 4+2x \\ 5x-3<4x-1 \end{matrix}\right\}$$

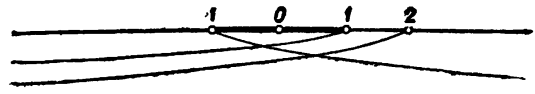
Решение. Решая данные неравенства, получим соответственно $x\geqslant -1$ и $x<2$.

Оба неравенства удовлетворяются, если $-1 \leqslant x < 2$.

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3+x &> 4+2x \\ 5x-3 &> 4x-1 \end{aligned}\right\}$$

Решения первого и второго неравенств соответственно суть $x < -1$ и $x > 2$. Последние неравенства исключают друг друга, так как оба они не могут удовлетворяться ни при каком значении x. Система не имеет решений.



Черт. 74.

4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3+x &< 4+2x \\ 5x-3 &< 4x-1 \\ 7+2x &> 6+3x \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Решая каждое из данных неравенств, получим соответственно:

$$-1 < x, \quad x < 2 \quad \text{и} \quad x < 1.$$

Все три неравенства выполняются, если $-1 < x < 1$. Интервал $(-1, 1)$ является общей частью трех интервалов $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 1)$ и $(-1, \infty)$ (черт. 74).

§ 73. Неравенства высших степеней с одним неизвестным

Неравенство второй степени после переноса всех его членов в левую часть принимает вид:

$$ax^2+bx+c > 0 \text{ или } ax^2+bx+c < 0,$$

где $a \neq 0$.

Рассмотрим следующие три случая.

1° $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Корни квадратного трехчлена действительные и различные. Пусть x_1 и x_2 — корни трехчлена; положим для определенности, что $x_1 < x_2$. Имеем:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Если $a > 0$, то знак трехчлена совпадает со знаком произведения

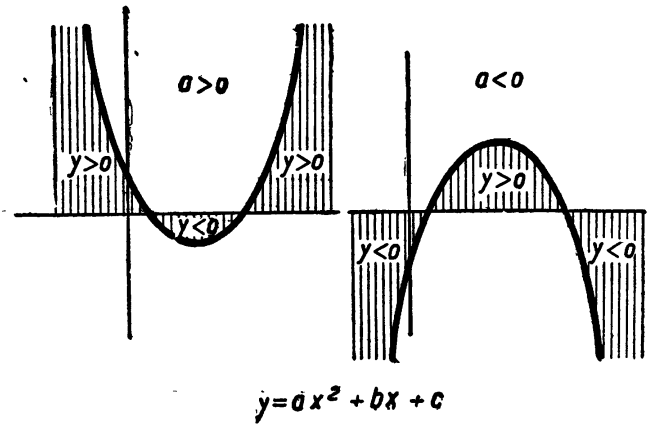
$$(x-x_1)(x-x_2), \tag{1}$$

если же $a < 0$, то знак трехчлена противоположен знаку этого произведения. При любом значении $x < x_1$ имеем $x-x_1 < 0$ и $x-x_2 < 0$, поэтому произведение (1) положительно. При любом значении x, заключенном между x_1 и x_2, т. е. $x_1 < x < x_2$, имеем $x-x_1 > 0$ и $x-x_2 < 0$, поэтому произведение (1) отрицательно. При любом значении $x > x_2$ имеем $x-x_1 > 0$ и $x-x_2 > 0$, поэтому произведение (1) положительно.

Следовательно, *неравенство* $ax^2+bx+c > 0$ *выполняется при* $a > 0$, *если* $x < x_1$, *или если* $x > x_2$ [*т. е. в двух интервалах* $(-\infty, x_1)$ *и* (x_2, ∞)] *и при* $a < 0$, *если* $x_1 < x < x_2$ (*т. е. в интервале* (x_1, x_2)).

Неравенство $ax^2+bx+c < 0$ *при* $a > 0$ *выполняется, если* $x_1 < x < x_2$, *и при* $a < 0$, *если* $x < x_1$ *или* $x > x_2$.

Если $x = x_1$ или $x = x_2$, то трехчлен обращается в нуль. Результаты исследования пояснены геометрически на чертеже 75.

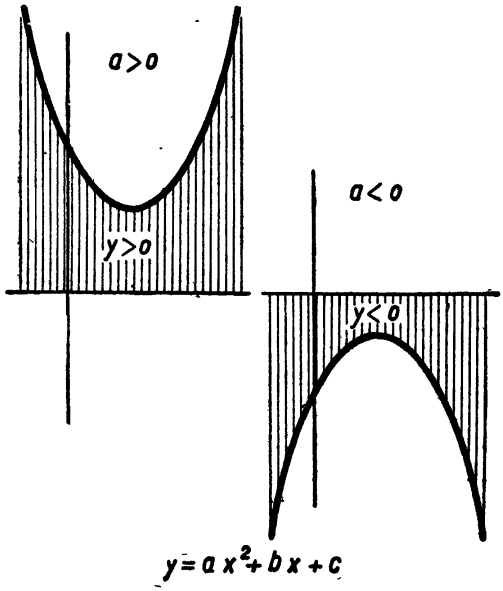


Черт. 75.

2° $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Корни квадратного трехчлена — мнимые сопряженные. Выделяя полный квадрат, получим:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right]. \qquad (2)$$

Выражение в квадратных скобках положительно, так как $4ac - b^2 > 0$, а $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ не может иметь отрицательных значений.



Черт. 76.

Знак трехчлена при всех действительных значениях x совпадает со знаком коэффициента a. Следовательно, *неравенство*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

выполняется при всех значениях x, если $a > 0$, и не выполняется ни при каких значениях x, если $a < 0$.

Неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0$$

не выполняется ни при каких значениях x, если $a > 0$, и выполняется при всех значениях x, если $a < 0$. Результаты исследования пояснены на чертеже 76.

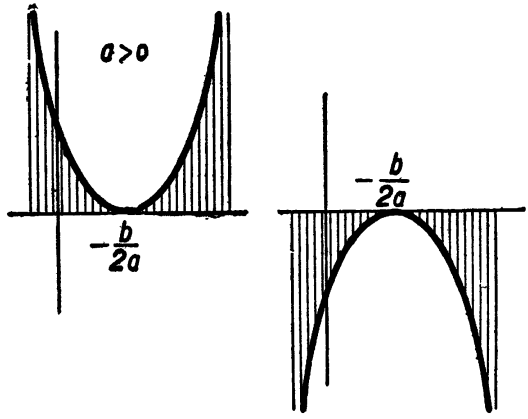
3° $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Квадратный трехчлен имеет действительный двукратный корень. Формула (2) принимает вид

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Знак квадратного трехчлена одинаков со знаком a, кроме единственного значения $x=-\frac{b}{2a}$, при котором квадратный трехчлен обращается в нуль (черт. 77).

Сказанное можно резюмировать в следующем виде:

Квадратный трехчлен с действительными различными корнями может иметь как положительные, так и отрицательные значения. Трехчлен с мнимыми корнями не может иметь значений, различных по знаку, и обращаться в нуль. Трехчлен, имеющий двойной корень, обращается в нуль при единственном значении аргумента и не может иметь численных значений, различных по знаку.



Черт. 77.

Примеры: 1. Решить неравенство

$$x^2+6<5x.$$

Решение. Имеем: $x^2-5x+6<0$. Решая уравнение $x^2-5x+6=0$, находим корни трехчлена: $x_1=2$, $x_2=3$, следовательно, $(x-2)(x-3)<0$, откуда $2<x<3$.

2. Решить неравенство $8x-4x^2<3$.

Решение. Имеем:

$$-4x^2+8x-3<0, \text{ откуда } 4x^2-8x+3>0.$$

Корни квадратного трехчлена суть $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$, откуда:

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0.$$

Следовательно, $x<\frac{1}{2}$ и $x>\frac{2}{3}$, т. е. неравенство выполняется в интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

3. Неравенство $x^2-x+1>0$ удовлетворяется при любых действительных значениях x, ибо $\Delta<0$ и $a=1>0$.

4. Решить неравенство

$$\frac{x^2+x-6}{2a+1}>x+6\,(2a-1) \quad \left(\text{где } a\neq-\frac{1}{2}\right).$$

Решение. Перенеся члены в одну часть, после приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{x^2-2ax-24a^2}{2a+1}>0.$$

Корни трехчлена $x^2-2ax-24a^2$ суть $-4a$ и $6a$.

1° Если $2a+1>0$, т. е. $a>-\frac{1}{2}$, то, умножая на $2a+1$, получим неравенство:

$$x^2-2ax-24a^2>0.$$

При $a>0$ меньший корень есть $-4a$, больший есть $6a$; имеем:

$$x<-4a \text{ и } x>6a.$$

При $-\frac{1}{2}<a<0$ меньший корень есть $6a$, больший $-4a$, имеем:

$$x<6a \text{ и } x>-4a.$$

2° $2a+1<0$, т. е. $a<-\frac{1}{2}$. Умножая на $2a+1$, получим:

$$x^2-2ax-24a^2<0.$$

Откуда $6a<x<-4a$.

3° При $a=0$ неравенство принимает вид $x^2>0$, удовлетворяется всеми значениями $x\neq 0$; имеем: $x>0$ и $x<0$.

5. Исследовать корни квадратного уравнения

$$x^2-(8k-2)x+(15k^2-2k-7)=0 \qquad (3)$$

в зависимости от значений параметра k.

Решение. Составляем дискриминант:

$$\Delta=(8k-2)^2-4(15k^2-2k-7)=4(k^2-6k+8).$$

A) Если $k^2-6k+8>0$, то корни уравнения (3) действительны и различны.

B) Если $k^2-6k+8<0$, то корни уравнения (3) мнимые сопряженные.

C) Если $k^2-6k+8=0$, то уравнение имеет кратный корень.

Корни трехчлена k^2-6k+8 суть $k_1=2$, $k_2=4$.

Случай A) имеет место, если $k<2$ или $k>4$. Случай B) имеет место, если $2<k<4$. Случай C) имеет место, если $k=2$ или $k=4$.

Изложенный метод применяется и к решению неравенств высших степеней. Мы ограничимся лишь общими указаниями и рассмотрением конкретных примеров. Пусть дано неравенство:

$$\varphi(x)>0, \qquad (4)$$

где $\varphi(x)$ многочлен. Если известно разложение многочлена $\varphi(x)$ на неприводимые множители над полем действительных чисел, то для решения неравенства (4) достаточно знать знак каждого из сомножителей. Но в поле действительных чисел всякий многочлен разлагается на множители 1-й и 2-й степени, поэтому задача сводится к решению ряда неравенств 1-й и 2-й степени.

Примеры: 1. Решить неравенство

$$x^3-2x^2-x+2>0.$$

Решение. Разлагая на множители многочлен в левой части, перепишем неравенство в виде:

$$(x+1)(x-1)(x-2)>0.$$

При $x<-1$ все три множителя отрицательны: $(-)\cdot(-)\cdot(-)$, поэтому неравенство не имеет места. Если $-1<x<1$, то два множителя отрицательны: $(+)\cdot(-)\cdot(-)$, неравенство выполняется. Если $1<x<2$, то один множитель отрицателен: $(+)\cdot(+)\cdot(-)$, неравенство не имеет места. Если $2<x$, то все три множителя положительны $(+)\cdot(+)\cdot(+)$, неравенство

выполняется. Итак, неравенство имеет место в интервалах $-1<x<1$ и $2<x<\infty$. В точках -1, 1, 2 трехчлен обращается в нуль, а потому неравенство не выполняется.

2. Решить неравенство $x^4-3x^3-x+3<0$.

Решение. Разлагая на множители левую часть, перепишем неравенство в виде:

$$(x-1)(x-3)(x^2+x+1)<0.$$

Трехчлен x^2+x+1 имеет мнимые корни и его значения положительны. Поэтому достаточно решить квадратное неравенство:

$$(x-1)(x-3)<0,$$

из которого находим $1<x<3$.

Алгебраическое неравенство, содержащее дробные выражения относительно неизвестного, после переноса его членов в одну часть и приведения дробей к общему знаменателю примет вид:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}>0 \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}<0.$$

Первое неравенство удовлетворяется при условии

$$\left.\begin{array}{l} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} f(x)<0 \\ \varphi(x)<0 \end{array}\right\}$$

Таким образом, задача приводится к решению двух систем неравенств. Аналогично решение второго неравенства приводится к решению двух систем неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)<0 \\ \varphi(x)>0 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} f(x)>0 \\ \varphi(x)<0 \end{array}\right\}$$

Пример. Решить неравенство.

$$1+\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-2}{x-1}$$

Решение. После переноса всех членов в одну часть и приведения к общему знаменателю получим неравенство

$$\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)}>0.$$

Корни числителя суть $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$, корни знаменателя суть 1 и 3. Разложив числитель на множители, перепишем неравенство в виде:

$$\frac{[x-(2-\sqrt{3})]\,[x-(2+\sqrt{3})]}{(x-1)(x-3)}>0.$$

Расположим по величине корни числителя и знаменателя:

$$2-\sqrt{3}<1<3<2+\sqrt{3}.$$

Если $x<2-\sqrt{3}$, то знаки сомножителей в числителе и знаменателе распределяются следующим образом $\frac{(-)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)}$, неравенство удовлетворяется.

Если $2-\sqrt{3}<x<1$, то имеем распределение знаков $\frac{(+)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)}$, неравенство не удовлетворяется.

Если $1<x<3$, то имеем распределение знаков $\frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(-)}$, неравенство удовлетворяется.

Если $3<x<2+\sqrt{3}$, то имеем распределение знаков $\frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(+)}$, неравенство не удовлетворяется.

Если $2+\sqrt{x}<x$, то имеем распределение знаков $\frac{(+)\cdot(+)}{(+)\cdot(+)}$, неравенство удовлетворяется.

Итак, неравенство удовлетворяется в интервалах

$$(-\infty,\ 2-\sqrt{3}),\quad (1,\ 3)\ \text{и}\ (2+\sqrt{3},\ \infty).$$

§ 74. Примеры решения неравенств с несколькими неизвестными

Рассмотрим следующий пример решения неравенства 1-й степени с двумя неизвестными:

$$2x-3y+4<0.$$

Решая неравенство относительно одного из неизвестных, например y, получим:

$$-3y<-2x-4,$$

откуда:

$$y>\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Придавая x произвольное действительное значение и взяв для другого неизвестного y любое значение больше, чем соответствующее значение выражения $\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, мы получим пару чисел, удовлетворяющих данному неравенству. Так, например, положив $x=1$, можно для другого неизвестного y взять любое значение большее, чем $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$. Решение данного неравенства записывается так:

$$-\infty<x<\infty,\ y>\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Геометрически решения данного неравенства изображаются точками полуплоскости I (черт. 78), т. е. точками, лежащими выше прямой

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим примеры решения системы двух неравенств с двумя неизвестными.

Решить систему неравенств первой степени:

$$\left.\begin{aligned} y-x+1&>0\\ 2x-y-3&>0 \end{aligned}\right\}$$

Решая каждое неравенство относительно одного из неизвестных, например y, получим:

$$\left.\begin{array}{l} y > x - 1 \\ y < 2x - 3 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Следовательно мы должны иметь:

$$x - 1 < y < 2x - 3.$$

Последние неравенства могут выполняться лишь при значениях x, удовлетворяющих условию:

$$x - 1 < 2x - 3, \quad \text{откуда} \quad x > 2.$$

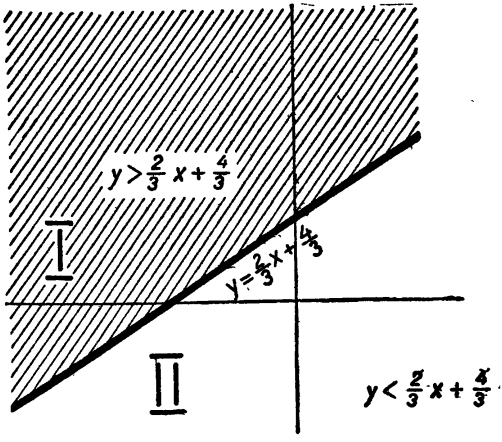
Итак значения x и y, удовлетворяющие данной системе, определяются из условий:

$$2 < x < \infty, \quad x - 1 < y < 2x - 3.$$

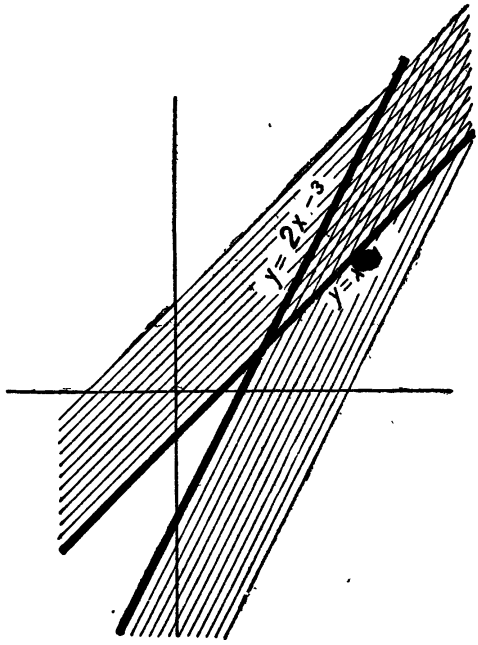
Эти неравенства определяют элементарную область, ограниченную сверху прямой $y = 2x - 3$, а снизу прямой $y = x - 1$. Решение дает любая точка, расположенная внутри угла, заштрихованного клеточками на чертеже. 79. Точка пересечения данных прямых есть $x = 2$, $y = 1$; решение системы дает любая точка с абсциссой, большей числа 2, и с ординатой, заключенной между ординатами данных прямых.

Решить систему

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 < 0 \\ 9x - 3y - 2 < 0 \end{array}\right\}$$



Черт. 78.



Черт. 79.

Решая относительно y, получим

$$\left.\begin{aligned} y &> 2x+1 \\ y &> 3x-\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решение относительно x также приведет к неравенствам одинакового смысла. Неравенства (2) показывают, что при данном x значение y должно быть выбрано бо́льшим, чем наибольшее из значений $2x+1$ и $3x-\frac{2}{3}$. Чтобы решить, какое из этих выражений имеет большее значение, составим неравенство

$$3x-\frac{2}{3} \geqslant 2x+1,$$

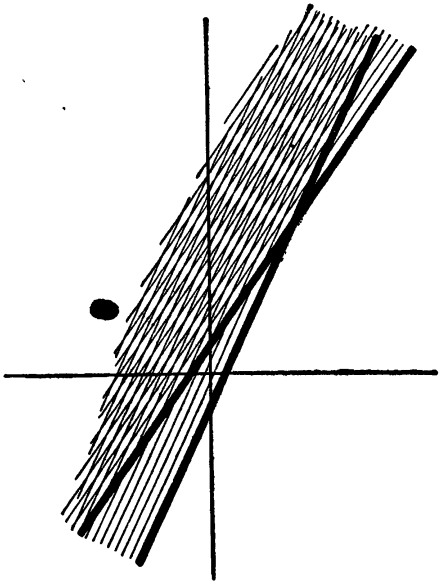
откуда:

$$x \geqslant \frac{5}{3}.$$

При $x \leqslant \frac{5}{3}$ справедливо неравенство $3x-\frac{2}{3} \leqslant 2x+1$. Следовательно, решение данной системы можно представить в следующем виде:

$$y > 3x-\frac{2}{3}, \text{ если } x \geqslant \frac{5}{3};$$

$$y > 2x+1, \text{ если } x \leqslant \frac{5}{3}.$$



Черт. 80.

Точки, изображающие решения системы, должны быть расположены выше каждой из прямых $y=2x+1$ и $y=3x-\frac{2}{3}$, пересекающихся в точке $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{13}{3}$ (черт. 80).

Решить систему

$$\left.\begin{aligned} y-x^2 &> 0 \\ x-y^2 &> 0 \end{aligned}\right\}$$

Из первого неравенства находим $y > x^2$, и так как всегда $x^2 \geqslant 0$, то y должно быть положительным числом. Аналогично из второго найдем $x > 0$. Из данных неравенств получим:

$$x^2 < y < \sqrt{x}.$$

Последнее возможно при условии $x^2 < \sqrt{x}$, откуда $x^4 < x$ или $x^3 < 1$, что дает $0 < x < 1$. Следовательно, имеем:

$$0 < x < 1, \quad x^2 < y < \sqrt{x}.$$

Множество всех решений системы изображается точками, лежащими выше параболы $y=x^2$, но ниже верхней ветви параболы $y^2=x$ (черт. 81).

Решить систему

$$\left.\begin{array}{l} y-x>0 \\ y-x^3<0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

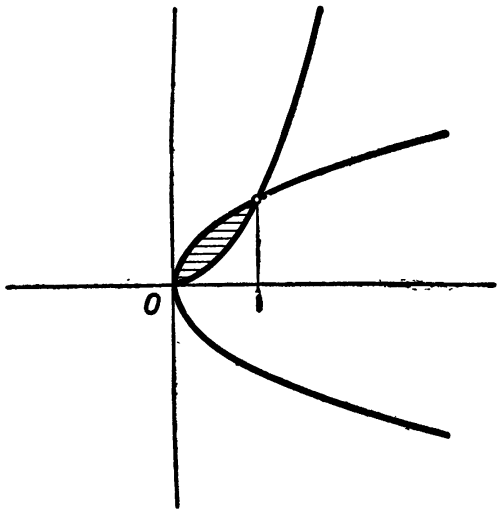
Имеем $x<y<x^3$, следовательно, должно выполняться условие:

$$x<x^3 \text{ или } x^3-x=(x+1)\,x\,(x-1)>0.$$

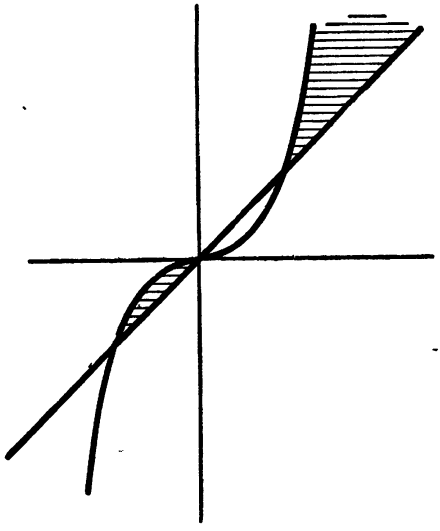
Последнее неравенство выполняется при условии $-1<x<0$ или $1<x$. Следовательно, имеем:

$$x<y<x^3, \text{ если } -1<x<0 \text{ или } 1<x.$$

Систему (3) можно переписать так: $y>x$ и $y<x^3$.



Черт. 81.



Черт. 82.

Следовательно, графически решения изображаются точками, лежащими выше прямой $y=x$, но ниже кубической параболы $y=x^3$ (черт. 82).

Решить систему

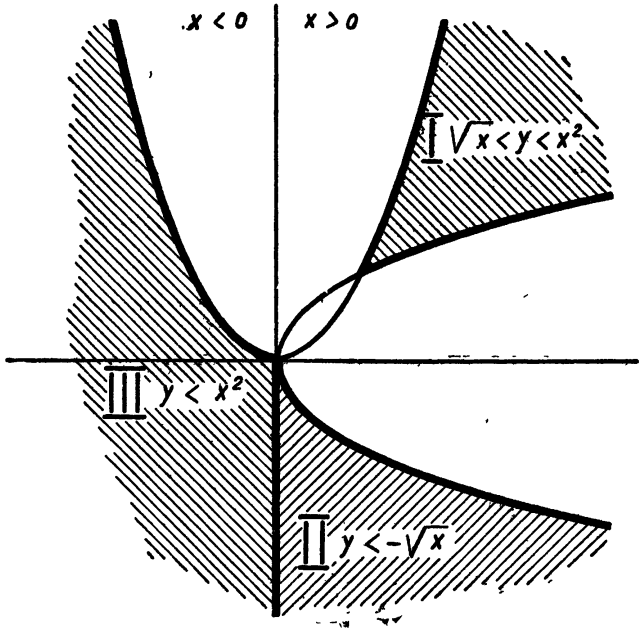
$$\left.\begin{array}{l} y<x^2 \\ x<y^2 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Если $x>0$, то из второго получим $|y|>\sqrt{x}$, откуда:

$$\text{I: } y>\sqrt{x}, \text{ либо II: } y<-\sqrt{x}.$$

Комбинируя I с первым неравенством (4), получим $\sqrt{x}<y<x^2$, что возможно при условии $\sqrt{x}<x^2$, откуда $1<x$.

Комбинируя II с первым неравенством (4), получим: $y < x^2$ и $y < -\sqrt{x}$, откуда, в силу транзитивности, $y < -\sqrt{x}$ (ибо при всех $x > 0$ имеем $-\sqrt{x} < x^2$).



Черт. 83.

Наконец, рассмотрим случай III: $x < 0$; тогда второе неравенство данной системы удовлетворяется само собой, и мы получим:

$$y < x^2.$$

Итак, имеем три элементарные области:

$$x < 0; \quad y < x^2; \tag{III}$$

$$0 < x < \infty; \quad y < -\sqrt{x}; \tag{II}$$

$$1 < x; \quad \sqrt{x} < y < x^2. \tag{I}$$

Полученные результаты изображены трафически на чертеже 83.

§ 75. Неравенства, содержащие абсолютную величину

Пусть h — данное положительное число. Неравенство

$$|x| < h \tag{1}$$

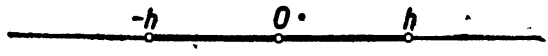
удовлетворяется всеми положительными числами x, меньшими h, и всеми отрицательными числами, бóльшими, чем $-h$.

Поэтому неравенство (1) эквивалентно неравенствам

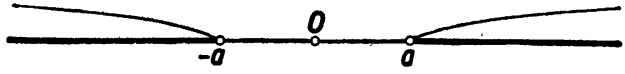
$$-h < x < h. \tag{2}$$

Геометрический неравенство (1) выражает, что точка x расположена на числовой прямой на расстоянии, меньшем h, от начала координат. Ясно, что точка x должна быть заключена в интервале $(-h, h)$ (черт. 84); это и выражают неравенства (2).

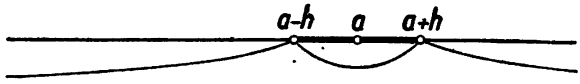
Неравенство $|x|>a$ эквивалентно при $a>0$ неравенствам $x>a$ или $x<-a$. Геометрически точка x должна быть на расстоянии,



Черт. 84.



Черт. 85.



Черт. 86.

большем a, от начала координат и, следовательно, располагаться в одном из интервалов $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) (черт. 85). При $a<0$ неравенство $|x|>a$ удовлетворяется всеми значениями x.

Неравенство

$$|x-a|<h \text{ (где } h>0)$$

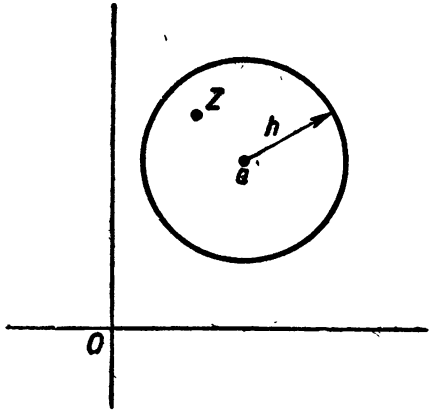
равносильно неравенствам

$$-h<x-a<h \text{ или } a-h<x<a+h.$$

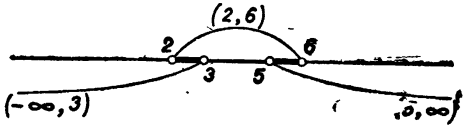
Соответствующая точка x должна быть расположена в интервале длины $2h$ со серединой в точке a. При выполнении неравенства $|x-a|>h$ точка x расположена вне этого интервала (черт. 86).

Пусть a — данное комплексное число. Выражение $|z-a|$ равно длине отрезка, соединяющего точки z и a. Следовательно, неравенство

$$|z-a|<h$$



Черт. 87.



Черт. 88.

выполняется для всех точек, лежащих внутри круга радиуса h с центром в точке a (черт. 87).

Примеры: 1. Неравенство $|x-2|<1$ выражает интервал $1<x<3$. В комплексной плоскости неравенство $|z-2|<1$ выражает внутренность круга радиуса 1 с центром в точке 2.

2. Неравенство

$$1<|x-4|<2$$

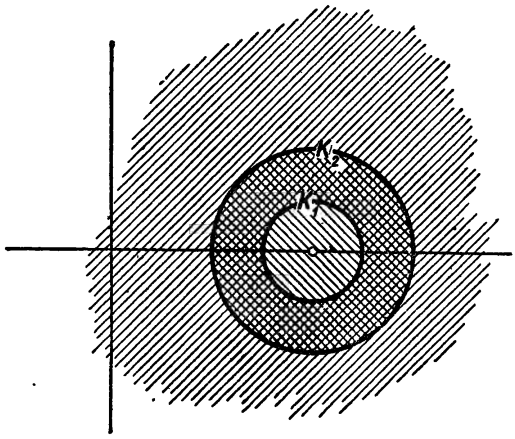
равносильно следующей системе неравенств:

$$1<|x-4| \text{ и } |x-4|<2.$$

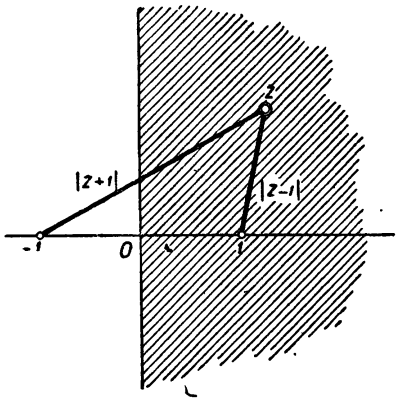
Первое изображается двумя интервалами:

$$-\infty<x<3 \text{ и } 5<x<\infty,$$

второе — интервалом $2<x<6$.



Черт. 89.



Черт. 90.

Общую часть составляют два интервала (черт. 88):

$$2<x<3 \text{ и } 5<x<6.$$

В комплексной плоскости неравенство $1<|x-4|$ изображает множество точек, лежащих вне круга K_1 радиуса 1 с центром в точке 4. Неравенство $|x-4|<2$ изображает внутренность круга K_2 радиуса 2 с центром в точке 4.

Неравенства

$$1<|x-4|<2$$

изображают множество точек, лежащих внутри кольца, ограниченного кругами K_1 и K_2 (черт. 89).

3. Неравенство

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1 \text{ или}$$

$$|z-1|\leqslant|z+1|$$

выражает, что расстояние точки z до точки 1 не больше расстояния z до точки -1. Множество точек z есть правая полуплоскость, включая мнимую ось (черт. 90).

§ 76. Доказательство неравенств

Пусть A и B некоторые данные математические выражения, содержащие буквы-аргументы.

Если при всех допустимых численных значениях аргументов значения A и B связаны неравенством

$$A<B \text{ или } A>B,$$

то говорят, что это неравенство выполняется тождественно (при данных допустимых значениях аргументов).

Под доказательством неравенства обычно понимают доказательство утверждения, что данное неравенство выполняется тождественно при всех допустимых значениях входящих в него букв. Задача доказательства неравенства аналогична задаче доказательства тождества так же, как задача решения неравенства аналогична задаче решения уравнения.

Общих способов доказательства неравенств установить невозможно в виду большого разнообразия как самих неравенств, так и применяемых в доказательствах методов. Наряду с весьма примитивными способами нередко применяются остроумные и искусственные приемы, так что не представляется возможным выработать определенную рецептуру.

§ 77. Некоторые замечательные неравенства

Ниже мы рассмотрим ряд примеров на доказательство некоторых замечательных неравенств и на применение характерных методов.

1° Доказать, что при всех натуральных значениях n имеет место неравенство

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<3. \qquad (1)$$

Доказательство. При $n=1$ и $n=2$ неравенство очевидно непосредственно. Для доказательства в общем виде заменим в знаменателях, начиная с 4-го слагаемого, числа 3, 4, ..., n меньшим числом 2. Будем иметь неравенства

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}<\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Следовательно,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отбрасывая отрицательное слагаемое $-\frac{1}{2^{n-1}}$, получим (1), ч. т. д.

2° Доказать неравенство

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2 \qquad (2)$$

при всех натуральных n.

Доказательство. Задача аналогична предыдущей, однако решение строится на иных принципах. Примем во внимание, что

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{(k-1)}-\frac{1}{k}.$$

Положив последовательно $k=2,\ 3,\ \ldots,\ n$ и подставив в левую часть неравенства (2), получим:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2, \text{ ч. т. д.}$$

3° Доказать, что при $x>0$ и при любом натуральном n имеет место неравенство

$$1+nx<(1+x)^n.$$

Доказательство.
В самом деле,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+x^n.$$

Опуская в правой части все слагаемые (положительные), начиная с третьего, получим требуемое неравенство, ч. т. д.

4° Теорема об абсолютной величине суммы: *Абсолютная величина суммы не больше, чем сумма абсолютных величин слагаемых.*

Докажем, что при любых действительных $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ имеет место соотношение:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Доказательство вытекает непосредственно из правила сложения положительных и отрицательных чисел. Если слагаемые суть числа одинакового знака (возможно, что среди них имеются равные нулю), то абсолютная величина суммы равна сумме абсолютных величин слагаемых. В этом случае имеем равенство:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Если среди слагаемых имеются и положительные и отрицательные числа, то для вычисления абсолютной величины суммы можно сложить в отдельности абсолютные величины положительных и абсолютные величины отрицательных слагаемых и из большей суммы вычесть меньшую. Для вычисления же суммы абсолютных величин достаточно сумму абсолютных величин положительных слагаемых сложить с суммой абсолютных величин отрицательных слагаемых. В этом случае имеем неравенство:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|<|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|, \text{ ч. т. д.}$$

Так, например,

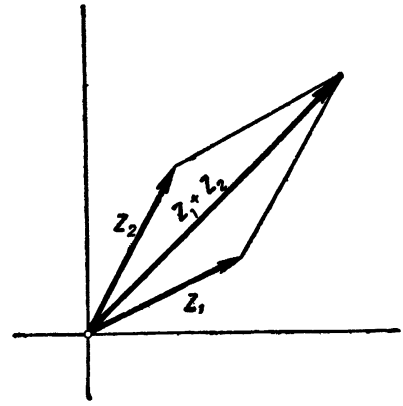
$|2+5+1|=8$ и $|2|+|5|+|1|=8$ (имеем равенство).

$|2+5-1|=6$ и $|2|+|5|+|-1|=8$ (имеем неравенство).

Заметим, что теорема остается справедливой и для комплексных слагаемых. На чертеже 91 дана геометрическая интерпретация теоремы для случая двух слагаемых: $|z_1+z_2|$ есть длина диагонали параллелограма, $|z_1|+|z_2|$ есть сумма длины его смежных сторон, поэтому:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

Равенство возможно в случае, когда векторы z_1 и z_2 имеют одно и то же направление, и тогда параллелограм вырождается в отрезок.



Черт. 91.

5° Доказать неравенство

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|. \qquad (3)$$

Доказательство. Если не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю*, то $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}>0$ и мы имеем:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}=\frac{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}=$$

$$=|a_1|\frac{|a_1|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}+|a_2|\frac{|a_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}+\ldots+$$

$$+|a_n|\frac{|a_n|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}.$$

Так как

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2+\ldots+a_n^2}\geqslant\sqrt{a_k^2} \qquad (\text{где } k=1, 2, \ldots n),$$

то $\dfrac{|a_k|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}\leqslant 1$, отсюда и вытекает неравенство (3), ч. т. д.

При $n=2$ и $n=3$ неравенству легко дать геометрическое толкование. Так, при $n=2$ построим прямоугольный треугольник с катетами $|a_1|$ и $|a_2|$; неравенство принимает вид:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}<|a_1|+|a_2|,$$

---

* Если $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, то соотношение (3) обращается в равенство.

оно выражает, что длина гипотенузы меньше суммы длин катетов. Аналогично при $n=3$ неравенство выражает, что длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на отрезках $|a_1|$, $|a_2|$ и $|a_3|$, меньше суммы длин этих отрезков.

6° Доказать неравенство

$$|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}|\leqslant$$
$$\leqslant|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|. \qquad (4)$$

Доказательство.

Имеем:

$$|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}|=$$
$$=\frac{|(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}.$$

Но

$$|(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)|=$$
$$=|(a_1-b_1)(a_1+b_1)+(a_2-b_2)(a_2+b_2)+\ldots+(a_n-b_n)(a_n+b_n)|\leqslant$$
$$\leqslant|a_1-b_1||a_1+b_1|+|a_2-b_2||a_2+b_2|+\ldots+|a_n-b_n||a_n+b_n|.$$

Деля почленно на $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$ и принимая во внимание, что

$$\frac{|a_k+b_k|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}\leqslant\frac{|a_k+b_k|}{|a_k|+|b_k|}\leqslant 1,$$

получим неравенство (4), ч. т. д.*.

7° Неравенство Буняковского. *При всех действительных значениях букв a_i и b_i $(i=1, 2, \ldots n)$ выполняется неравенство*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

или (в сокращенной записи)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Равенство имеет место лишь при условии, если числа a_i и b_i пропорциональны:

$$a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ \ldots,\ a_n=kb_n.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-xb_i)^2=(a_1-xb_1)^2+(a_2-xb_2)^2+\ldots+(a_n-xb_n)^2. \qquad (5)$$

---

* Доказательство неприменимо, если $a_1=a_2=\ldots=a_n=b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, но в этом случае имеем равенство.

Выражение (5) является квадратным трехчленом относительно x; располагая этот трехчлен по степеням x, получим:

$$x^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \qquad (6)$$

Из (5) ясно, что значения трехчлена (6) неотрицательны при всех действительных x, a_i и b_i, поэтому его дискриминант не положителен.

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 0. \qquad (7)$$

Отсюда и вытекает неравенство Буняковского. Если неравенство (7) обращается в равенство, то трехчлен имеет двукратный корень $x = k$. Но выражение (5) может обратиться в нуль при $x = k$, если каждое из слагаемых обратится в нуль, т. е. если числа a_i и b_i пропорциональны, ч. т. д.

8° *При всех действительных a_i и b_i справедливо неравенство*

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

или кратко

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Равенство имеет место лишь, если числа a_i и b_i пропорциональны.

Доказательство. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |a_i| |b_i|$$

(по теореме об абсолютной величине суммы)

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

(в силу неравенства Буняковского)

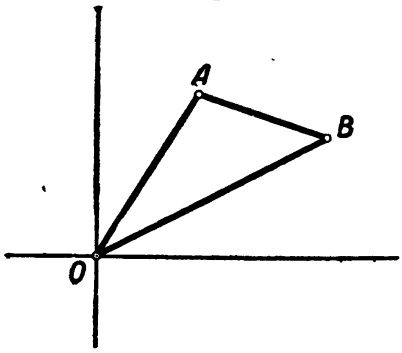
$$= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right]^2.$$

Отсюда и вытекает доказываемое неравенство, ч. т. д.

При $n = 2$ неравенство принимает вид

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \qquad (8)$$

Этому неравенству легко дать геометрическое толкование. Пусть $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ две точки плоскости. Неравенство (8) выражает, что сумма отрезков OA и OB не меньше отрезка AB (черт. 92). Аналогичную интерпретацию имеет неравенство при $n=3$.



Черт. 92.

9° *Среднее арифметическое неотрицательных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *не меньше среднего геометрического этих чисел:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Равенство имеет место при условии $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Доказательство проведем методом полной индукции. Докажем справедливость неравенства при $n=2$

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}. \tag{9}$$

В самом деле, при любых действительных x_1 и x_2 имеем:

$$(x_1-x_2)^2 = x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 \geqslant 0,$$

откуда:

$$x_1x_2 \leqslant \frac{x_1^2+x_2^2}{2}.$$

Полагая $x_1=\sqrt{a_1}$ и $x_2=\sqrt{a_2}$, получим неравенство (9). Равенство возможно лишь при условии $x_1-x_2=0$, т. е. $x_1=x_2$, а следовательно, $a_1=a_2$.

Для доказательства неравенства в общем виде выведем предварительно некоторое вспомогательное неравенство. Если x_1 и x_2 неотрицательные числа, то при $x_1<x_2$ имеем $x_1^{n-1}<x_2^{n-1}$, если же $x_1>x_2$, то $x_1^{n-1}>x_2^{n-1}$.

Следовательно, при любых неотрицательных x_1 и x_2 имеем

$$(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})(x_1-x_2) \geqslant 0 \text{ (равенство, если } x_1=x_2).$$

Раскрывая скобки и перенося часть членов в правую часть, получим:

$$x_1^n+x_2^n \geqslant x_1x_2^{n-1}+x_2x_1^{n-1} \text{ (равенство, если } x_1=x_2).$$

Взяв n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, написав соответствующие неравенства и сложив их почленно, получим:

$$\begin{aligned}(x_1^n+x_2^n)+(x_1^n+x_3^n)+\ldots\ldots\ldots+(x_1^n+x_n^n)+\\ +(x_2^n+x_3^n)+\ldots\ldots\ldots+(x_2^n+x_n^n)+\\ +(x_3^n+x_4^n)+\ldots+(x_3^n+x_n^n)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(x_{n-1}^n+x_n^n) \geqslant .\end{aligned}$$

$$\geqslant (x_1x_2^{n-1}+x_2x_1^{n-1})+(x_1x_3^{n-1}+x_3x_1^{n-1})+\ldots+(x_1x_n^{n-1}+x_nx_1^{n-1})+$$
$$+(x_2x_3^{n-1}+x_3x_2^{n-1})+\ldots+(x_2x_n^{n-1}+x_nx_2^{n-1})+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x_{n-1}x_n^{n-1}+x_nx_{n-1}^{n-1}) \qquad (10)$$

(равенство если $x_1=x_2=\ldots=x_n$).

Откуда, выполняя приведение подобных членов, получим:

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n)\geqslant x_1(x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1})+$$
$$+x_2(x_1^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1})+\ldots+$$
$$+x_n(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_{n-1}^{n-1}). \qquad (11)$$

Допустим, что для любых $n-1$ неотрицательных чисел среднее арифметическое не меньше их среднего геометрического. Следовательно, в частности:

$$x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\geqslant (n-1)\,x_2x_3\ldots x_n$$
$$x_1^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\geqslant (n-1)\,x_1x_3\ldots x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_{n-1}^{n-1}\geqslant (n-1)\,x_1x_2\ldots x_{n-1}$$

(равенство при $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n$).

Пользуясь последними неравенствами, можно усилить неравенство (11)

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n)\geqslant n(n-1)\,x_1x_2\ldots x_n$$

(равенство при $x_1=x_2=\ldots=x_n$).

Полагая в последнем соотношении $x_1^n=a_1$, $x_2^n=a_2$, $\ldots$, $x_n^n=a_n$, получим:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

(равенство при $a_1=a_2=\ldots=a_n$).

Следовательно, среднее арифметических n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического в предположении, что соответствующее неравенство справедливо для $n-1$ чисел. Но при $n=2$ справедливость неравенства установлена непосредственной проверкой. Следовательно оно имеет место при любом натуральном $n\geqslant 2$, ч. т. д.

§ 78. Примеры на отыскание наибольших и наименьших значений

Лемма 1°. *Если сумма n положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n имеет данное значение S, то произведение*

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

имеет наибольшее значение, если

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}, \qquad (1)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — любые заданные положительные рациональные числа.

Доказательство. Предположим, что $m_1, m_2, \ldots, m_n$ натуральные числа. Рассмотрим $m_1+m_2+\ldots+m_n$ чисел

$$\overbrace{\frac{x_1}{m_1}, \frac{x_1}{m_1}, \ldots, \frac{x_1}{m_1}}^{m_1 \text{ раз}}; \overbrace{\frac{x_2}{m_2}, \frac{x_2}{m_2}, \ldots, \frac{x_2}{m_2}}^{m_2 \text{ раз}}; \ldots, \overbrace{\frac{x_n}{m_n}, \frac{x_n}{m_n}, \ldots, \frac{x_n}{m_n}}^{m_n \text{ раз}}$$

и напишем, что их среднее геометрическое не больше среднего арифметического:

$$\sqrt[m_1+m_2+\ldots+m_n]{\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{m_1}\left(\frac{x_2}{m_2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{x_n}{m_n}\right)^{m_n}} \leqslant \frac{m_1\frac{x_1}{m_1}+m_2\frac{x_2}{m_2}+\ldots+m_n\frac{x_n}{m_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

откуда:

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \leqslant \frac{m_1^{m_1}\cdot m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}}{(\Sigma m_i)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} S^{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \qquad (2)$$

Наибольшее значение для $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ получается, когда последнее неравенство обратится в равенство, что будет иметь место при условии

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{S}{\Sigma m_i}.$$

Пусть $m_1=\frac{p_1}{q_1}$, $m_2=\frac{p_2}{q_2}, \ldots, m_n=\frac{p_n}{q_n}$ — дробные числа. Обозначим через N наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей, а через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — соответствующие дополнительные множители. Имеем:

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}=\sqrt[N]{x_1^{p_1d_1}x_2^{p_2d_2}\ldots x_n^{p_nd_n}}.$$

При данной сумме наибольшее значение подкоренного выражения будет иметь место, если

$$\frac{x_1}{p_1d_1}=\frac{x_2}{p_2d_2}=\ldots=\frac{x_n}{p_nd_n},$$

деля знаменатели на N, получим соотношения (1), ч. т. д.

Следствие: если $m_1=m_2=\ldots=m_n=1$, то при данной сумме $x_1+x_2+\ldots+x_n$ произведение чисел $x_1x_2\ldots x_n$ имеет наибольшее значение, если эти числа равны:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Мы искали максимум произведения $P=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ при данной сумме $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$. Перепишем неравенство (2) следующим образом:

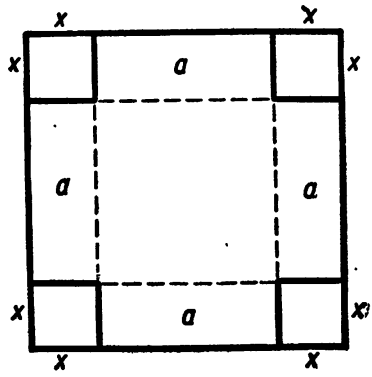
$$S \geqslant (m_1+m_2+\ldots+m_n)\left(\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}}\right)^{\frac{1}{m_1+m_2+\ldots+m_n}},$$

Это неравенство показывает, что при условии (1) оно обращается в равенство, и тогда при данном P сумма S получает наименьшее значение.

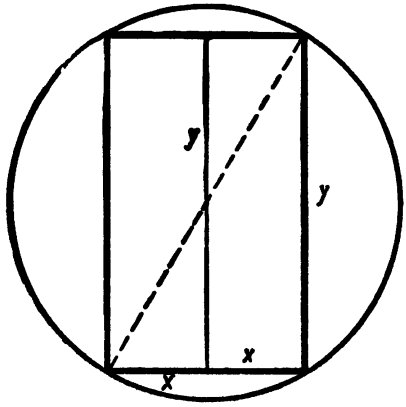
Задачи отыскания максимума P при данном S и минимума S при данном P называются взаимными. Как для той, так и для другой задачи решение дается условиями (1).

Задачи: 1. *Из всех прямоугольников с данным периметром найти тот прямоугольник, площадь которого является наибольшей.*

Решение. Пусть x и y — длины взаимно перпендикулярных сторон прямоугольника, $2S$ — его периметр и P — площадь. Имеем $x+y=S$, но



Черт. 93.



Черт. 94.

при данной сумме произведение P имеет наибольшее значение, если $x=y=\frac{S}{2}$, т. е. если прямоугольник является квадратом.

Взаимная задача формулируется следующим образом: *из всех прямоугольников с данной площадью найти тот, который имеет наименьший периметр.* Решение этой задачи также дает квадрат.

2. *Из данного квадрата со стороной a вырезать по углам такие квадраты со стороной x, чтобы после сгибания по пунктирным линиям* (черт. 93) *получалась коробка наибольшего объёма.*

Решение. Площадь основания коробки равна $(a-2x)^2$, высота равна x. Отсюда находим объем:

$$v=x(a-2x)^2.$$

Положим $a-2x=y$, тогда имеем:

$$2v=(2x)y^2.$$

Сумма сомножителей $2x$ и y равна a, следовательно, $2v$ (одновременно и v) имеет наибольшее значение, если

$$\frac{2x}{1}=\frac{y}{2}, \text{ т. е. } 2x=\frac{a-2x}{2},$$

откуда $x=\frac{a}{6}$.

3. *Найти цилиндр наибольшего объема, вписанный в шар данного радиуса R.*

Решение. Пусть x и y — радиус основания и высота искомого цилиндра, имеем $v=\pi x^2y$. Из чертежа 94, на котором фигура изображена в разрезе, находим:

$$4R^2=4x^2+y^2, \tag{3}$$

откуда:

$$v=\frac{\pi}{4}y(4R^2-y^2)=\frac{\pi}{4}(y^2)^{\frac{1}{2}}(4R-y^2).$$

Сумма множителей y^2 и $4R^2-y^2$ постоянна, поэтому максимальное значение объема получится, если

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=\frac{4R^2-y^2}{1},$$

откуда:

$$3y^2=4R^2 \quad \text{и} \quad y=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Из (3) получим $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

4. *Из всех прямоугольных параллелепипедов с данным объемом найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность.*

Решение. Пусть x, y и z — ребра искомого параллелепипеда, v — его объем, а $2S$ — полная поверхность. Имеем $v=xyz$.

Ищем минимум

$$S=xy+xz+yz.$$

Так как значение v дано, то данным можно считать также и значение $v^2=(xy)(xz)(yz)$. Минимум суммы S при данном произведении реализуется, если:

$$xy=xz=yz,$$

откуда:

$$x=y=z.$$

Следовательно, решение поставленной задачи дает куб.

Взаимная задача формулируется следующим образом: *Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной полной поверхностью найти тот, который имеет наибольший объем.* Решение этой задачи также дает куб.

Глава VII

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В АЛГЕБРЕ

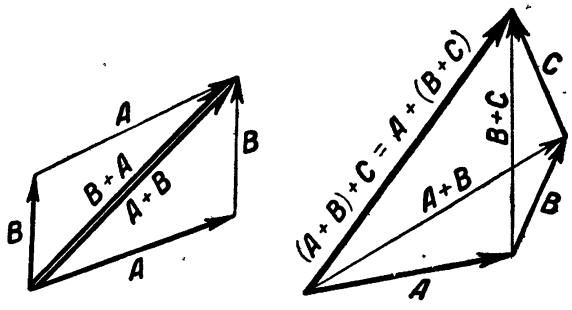
§ 79. Общие понятия

В математике и в ее применениях приходится встречаться с тем положением вещей, когда „алгебраические операции“ выполняются не только над числами, но над иными объектами (не являющимися числами). Так, например, операция сложения (или умножения) многочленов ставит в соответствие всяким двум данным многочленам третий многочлен — их сумму (произведение); операция сложения сил ставит в соответствие всяким двум данным силам третью силу — их равнодействующую. Аналогично рассматривается операция сложения путей, скоростей, ускорений и т. д.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементы которого могут иметь какую угодно природу (это могут быть числа, функции, силы, фигуры, преобразования и т. п.); *операцией, определенной в множестве $\mathfrak{M}$, называется соответствие, в силу которого произвольным двум элементам a и b (взятым в определенном порядке) множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент с того же множества.*

Примерами таких операций могут служить изученные в предыдущих главах операции над числами, многочленами, рациональными функциями, а также сложение сил и т. п.

Такое общее понятие операции еще не может служить предметом содержательного исследования. В самом деле, изучаемым в математике и в ее приложениях операциям присущи индивидуальные свойства — различные в различных конкретных случаях. Предметом изучения алгебры являются операции, обладающие некоторыми вполне определенными точно описанными свойствами. Во многих случаях две различные операции, выполняемые над различными по своей природе объектами, обладают общими свойствами, что позволяет присваивать им (операциям) общее наименование. Так, операции „сложения сил“ и „сложения чисел“ обладают рядом общих свойств. Примерами могут служить законы коммутативности и ассоциативности (на чертеже 95 пояснено выполнение этих свойств для сложения сил).



Черт. 95.

В символическом выражении этих законов:

$$a+b=b+a \text{ и } (a+b)+c=a+(b+c)$$

безразлично, что понимается под буквами a, b, c: числа, силы, либо какие-нибудь другие объекты, над которыми выполняется операция, обладающая данными свойствами.

Рассматривая наиболее часто встречающиеся в математике и в ее приложениях операции, подмечая их общие свойства и отвлекаясь от природы и индивидуальных свойств объектов, над которыми выполняются операции, мы приходим к абстрактному понятию множества (с элементами произвольной природы), в котором выполнимы операции (одна или несколько), обладающие некоторыми вполне определенными свойствами.

Сущность аксиоматического метода в алгебре заключается в следующем: рассматриваются множества, над элементами которых выполнимы операции (одна или несколько), обладающие данными характеристическими свойствами. Описание этих свойств дается при помощи системы аксиом. Различными системами аксиом характеризуются раз-

личные множества с установленными в них операциями (например, кольца, поля), которые и служат предметами изучения современной алгебры. Многие понятия современной алгебры, как обладающие большой степенью общности, получили в науке широкое распространение. Возможность вкладывать в них различное содержание открыла пути применения алгебраических методов во многих областях точных наук.

§ 80. Аксиомы кольца и их следствия

Определение. *Кольцом называется множество R, в котором определены две операции (действия):*

операция сложения, ставящая в соответствие всяким двум элементам a и b элемент c, называемый их суммой

$$c = a + b,$$

и операция умножения, ставящая в соответствие всяким двум элементам a и b элемент d, называемый их произведением:

$$d = ab.$$

Операции сложения и умножения характеризуются следующими свойствами:

Аксиомы сложения

1. Аксиома ассоциативности: *для любых трех элементов a, b и c имеем:*

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Аксиома коммутативности: *для любых элементов a и b имеем:*

$$a + b = b + a.$$

3. Аксиома обратного действия (для сложения): *для любых двух элементов a и b существует единственный элемент x, удовлетворяющий условию:*

$$a + x = b.$$

Элемент x называется разностью элементов b и a и обозначается так:

$$x = b - a$$

Аксиомы умножения

4. Аксиома ассоциативности: *для любых трех элементов a, b и c имеем:*

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

5. Аксиома коммутативности: *для любых двух элементов a и b имеем:*

$$ab = ba.$$

6. Аксиома дистрибутивности: *для любых трех элементов a, b и c имеем:*

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Примечание. В современной алгебре рассматриваются также некоммутативные кольца. Некоммутативное кольцо характеризуется всеми перечисленными аксиомами, кроме аксиомы 5. Значит, в некоммутативном кольце в общем случае произведение зависит от порядка сомножителей и не для всяких двух элементов a и b имеет место равенство $ab=ba$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением коммутативных колец, в которых выполнены все перечисленные аксиомы.

Применение аксиоматического метода возможно лишь в том случае, когда установлена непротиворечивость системы аксиом, положенных в основу той или иной теории. Если из данных аксиом в качестве следствий можно получить два противоречивые предложения, то это означает полную несостоятельность рассматриваемой системы аксиом и всей построенной на ее основе теории. Чтобы установить непротиворечивость системы аксиом кольца, достаточно указать хотя бы одно такое множество объектов, существование которых заранее известно и в котором выполняются все аксиомы кольца. Таким образом, задача будет решена, если будет показано хотя бы одно конкретное кольцо. Примером конкретного кольца может служить, например, множество всех целых чисел. В параграфе 6 было показано, что в этом множестве действительно выполняются все аксиомы кольца. Всякое противоречие, вытекающее из аксиом кольца, нашло бы свое отражение в некотором противоречии в обычной арифметике. Однако *в непротиворечивости арифметики, подтверждающейся многовековым опытом человечества, мы не сомневаемся.*

Примечание. Относительно независимости аксиом кольца заметим, что мы и не имеем в виду сформулировать минимальное число требований, определяющих понятие кольца.

Так, например, можно было бы не требовать однозначности вычитания. Достаточно потребовать существования хотя бы одного элемента x, удовлетворяющего условию $a+x=b$; пользуясь прочими аксиомами кольца, можно доказать его единственность (доказательство опускаем).

Каждое конкретное кольцо (например, кольцо целых чисел, кольцо многочленов) кроме перечисленных общих свойств 1—6 может обладать некоторыми индивидуальными свойствами, не вытекающими из аксиом 1—6.

Предложения, полученные как следствия из аксиом кольца 1—6 (и только лишь из этих аксиом), носят общий характер; *они имеют место для всех колец, вне зависимости от их индивидуальных свойств и от природы их элементов.* Многие предложения, известные из арифметики, не являются специфическими для чисел; эти

предложения, будучи следствиями аксиом 1—6, справедливы в произвольных кольцах. Ниже указан ряд теорем, вытекающих из аксиом кольца. При этом мы ограничиваемся лишь основными предложениями, так как общая теория колец выходит за рамки настоящего элементарного курса.

В § 5 (стр. 24) было указано, что известные из арифметики правила действий выводятся из основных законов действий и в качестве образца были приведены доказательства законов ассоциативности, дистрибутивности и правила умножения суммы на сумму для действий с любым числом компонентов. В этих рассуждениях под буквами (обозначавшими числа) можно подразумевать элементы л ю б о г о к о л ь ц а. В самом деле, так как в произвольном кольце справедливы основные законы действий, то справедливы и все следствия, вытекающие из них (и только лишь из них). Итак, известные из арифметики правила действий с любым числом компонентов, являющиеся следствиями основных законов действий, остаются в силе для любого кольца. Для доказательства достаточно в точности воспроизвести рассуждения, известные из курса арифметики (следя лишь за тем, чтобы не применялись никакие другие предложения, кроме основных законов и их следствий).

Аксиома обратного действия относительно сложения влечет за собой ряд предложений, известных для случая числовых колец.

Теорема. *Во всяком кольце существует единственный элемент: „нуль" данного кольца, сумма которого с любым элементом a кольца равна a:*

$$a+0=0+a=a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — какой-либо д а н н ы й элемент кольца. В силу аксиом 4 обратного действия существует единственный элемент x, удовлетворяющий условию $a+x=a$ (положить $b=a$).

Обозначим этот элемент символом 0. В силу коммутативности сложения имеем:

$$0+a=a+0=a.$$

Покажем, что для всякого другого элемента b кольца имеет место соотношение

$$0+b=b+0=b.$$

В самом деле, в силу 4 существует элемент y, удовлетворяющий условию

$$b=a+y.$$

Имеем:

$$b+0=0+b=0+(a+y)=(0+a)+y=a+y=b, \quad \text{ч. т. д.}$$

Теорема. *Для всякого элемента a кольца существует единственный элемент — a, называемый противоположным относительно a, удовлетворяющий условию*

$$a+(-a)=0.$$

Доказательство. В силу аксиомы 3 существует единственный элемент x, удовлетворяющий условию

$$a+x=0.$$

Обозначив $x=-a$, получим (2), ч. т. д.

Следствие I. Элемент, противоположный относительно $-a$, есть a:

$$-(-a)=a.$$

Следствие II.

Разность противоположных двух элементов может быть представлена в виде суммы элемента — уменьшаемого и элемента, противоположного вычитаемому. В самом деле, прибавляя $-b$ к обеим частям равенства

$$a=b+x,$$

получим: $x=a+(-b)$, т. е. $a-b=a+(-b)$.

Во всяком кольце наряду с элементом a содержатся его „целочисленные“ кратные:

$$\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n\text{ раз}}=na.$$

При этом

$$na+n(-a)=0, \text{ т. е. } -(na)=n(-a).$$

В самом деле:

$$na+n(-a)=(a+a+\ldots+a)+[(-a)+(-a)+\ldots+(-a)]=0.$$

Теорема. *Для произвольного элемента a кольца имеет место равенство*

$$a\cdot 0=0.$$

Доказательство. Имеем $0=b-b$ (где b — какой угодно элемент кольца); следовательно,

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0, \text{ ч. т. д.}$$

Обратное предложение не имеет места, так как существуют такие кольца, в которых произведение может быть равным нулю:

$$ab=0,$$

хотя ни один из сомножителей не равен нулю; такие сомножители называются делителями нуля.

Примеры: 1. Ряд колец известен читателю из предыдущих глав, а именно: множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел, множество всех комплексных чисел, множество всех многочленов с данным числом аргументов с коэффициентами, принадлежащими данному числовому кольцу.

2. Целыми комплексными числами называются числа вида $m+in$, где m и n — целые числа. Множество всех целых комплексных чисел есть кольцо. В самом деле, сумма, разность и произведение двух целых комплексных чисел есть также целое комплексное число. Так, например,

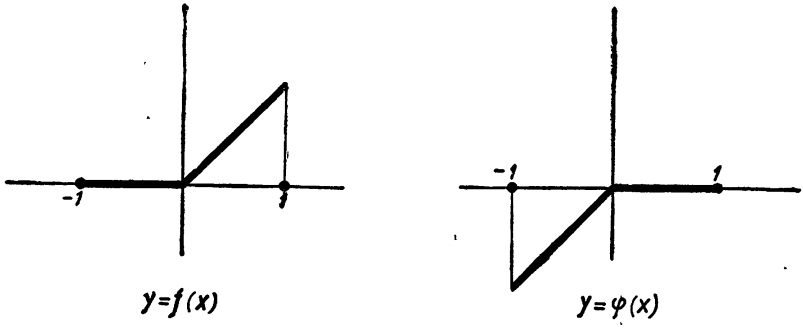
$$(m+in)(m_1+in_1)=(mm_1-nn_1)+i(nm_1+n_1m).$$

Заключенные в скобках (в правой части) числа являются целыми, если m, m_1, n, n_1 целые. Справедливость законов действий следует из справедливости этих законов в множестве всех комплексных чисел.

3. Рассмотрим множество всех функций (действительных от действительного аргумента), определенных на данном сегменте, например, на сегменте $[-1, 1]$. Под суммой (произведением) двух элементов $f(x)$ и $\varphi(x)$ (как обычно в анализе) подразумевается функция

$$F(x)=f(x)+\varphi(x) \quad (\text{или } F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)),$$

значение которой в данной точке x сегмента $[-1, 1]$ равно сумме (произведению) значений $f(x)$ и $\varphi(x)$ в этой точке.



Черт. 96.

Справедливость основных законов действий очевидна. Так, например,

$$f(x)+\varphi(x)=\varphi(x)+f(x) \text{ (коммутативность)},$$

ибо при всяком данном значении x правая и левая части имеют одно и то же значение (коммутативность сложения в множестве действительных чисел). Аксиома обратного действия также выполняется: условию

$$f(x)+X(x)=\varphi(x)$$

удовлетворяет единственная функция

$$X(x)=\varphi(x)+(-1)f(x)=\varphi(x)-f(x).$$

Следовательно, множество всех функций на данном сегменте есть кольцо. Нулем этого кольца является функция, тождественно равная нулю: $0(x)=$ $=\text{const}=0$. Кольцо функций имеет делители нуля. Положим, например:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0 \\ 0, \text{ если } x<0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x>0 \\ x, \text{ если } x\leqslant 0 \end{cases} \quad \text{(черт. 96)};$$

ни одна из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ не равна тождественно нулю, тогда как $f(x)\varphi(x)=0$.

4. Рассмотрим множество всех целых степеней числа 2:

$$\ldots, 2^{-2}, 2^{-1}, 1=2^0, 2, 2^2, \ldots.$$

Определим в этом множестве две операции „сложение" и „умножение" — следующим образом:

$$2^m \overset{*}{+} 2^n = 2^m 2^n = 2^{m+n} \quad \text{и} \quad 2^m \overset{*}{\times} 2^n = 2^{mn}.$$

Нетрудно проверить, что в данном множестве выполняются аксиомы кольца. Проверим, например, закон дистрибутивности. Имеем:

$$2^m \overset{*}{\times} (2^n \overset{*}{+} 2^p) = 2^m \overset{*}{\times} 2^{n+p} = 2^{m(n+p)} = 2^{mn+np}$$

$$\text{и } 2^m \overset{*}{\times} 2^n \overset{*}{+} 2^m \overset{*}{\times} 2^p = 2^{mn} \overset{*}{+} 2^{mp} = 2^{mn+mp}.$$

$$\text{Итак, } 2^m \overset{*}{\times} (2^n \overset{*}{+} 2^p) = 2^m \overset{*}{\times} 2^n \overset{*}{+} 2^m \overset{*}{\times} 2^p.$$

Аксиома обратного действия также выполнена, так как условию

$$2^m \overset{*}{+} 2^x = 2^n \text{ (т. е. } 2^{m+x} = 2^n)$$

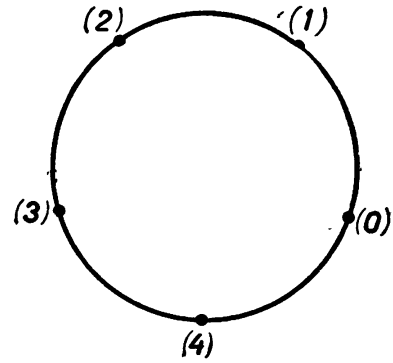
удовлетворяет единственное число $2^x = 2^{n-m}$.

„Нулем" в этом кольце является число $\overset{*}{0} = 2^0 = 1$, так как

$$2^m \overset{*}{+} \overset{*}{0} = 2^{m+0} = 2^m.$$

Хотя „сложение" и „умножение" в этом кольце понимаются не в обычном смысле, однако все свойства этих действий остаются в силе.

5. Пусть $p > 1$ какое-либо натуральное число, положим для определенности $p = 5$. При делении данного целого числа на 5 возможны следующие 5 неотрицательных остатков: 0, 1, 2, 3, 4. Например, число 17 дает остаток 2, так как $17 = 3 \cdot 5 + 2$. Число -12 дает остаток 3, так как $-12 = (-3) \cdot 5 + 3$. Рассмотрим так называемые классы вычетов по модулю 5, *отнеся к одному и тому же классу все числа, дающие при делении на 5 один и тот же остаток.* Эти классы принято обозначать так: класс (0) состоит из чисел 5 k (где k — произвольное целое число), кратных числу 5, т. е. из чисел 0, ± 5, ± 10, ..., $5k$; класс (1) состоит из чисел $5k+1$, дающих при делении на 5 остаток 1, т. е. из чисел ... -9, -4, 1, 6, 11, ... и т. д., и, наконец, класс (4) состоит из чисел $5k+4$, дающих при делении на 5 остаток 4.



Черт. 97.

Если представить себе числовую ось в виде тонкой нерастяжимой нити и отметить на ней точки с целочисленными абсциссами, а затем намотать эту ось на круг с длиной окружности, равной 5, то числа одного и того же класса совпадут и на окружности получатся 5 точек, соответствующих числам разных классов (черт. 97). Рассмотрим два числа из двух каких-либо классов (в частности можно взять числа одного и того же класса), возьмем, например, числа из классов (2) и (4).

$$5k+2 \text{ и } 5k_1+4.$$

Сумма и произведение этих чисел суть:

$$(5k+2)+(5k_1+4) = 5(k+k_1)+6 = 5(k+k_1+1)+1 \text{ и}$$

$$(5k+2)(5k_1+4) = 5(5kk_1+4k+2k_1)+8 = 5(5kk_1+4k+2k_1+1)+3.$$

Получились числа классов, к которым принадлежат 6 и 8, т. е. числа классов (1) и (3). Если взятые числа заменить двумя другими представителями тех же классов, т. е. взять числа $5k'+2$ и $5k_1'+4$, то их сумма и произведение окажутся числами тех же классов (1) и (3), которым принадлежат 6 и 8.

Таким образом, классы, которым принадлежит сумма и произведение двух чисел данных классов, не зависят от выбора чисел (представителей) из данных классов (это нетрудно проверить и в общем виде; предоставляем проверку читателю).

Рассмотрим множество, элементами которого являются классы вычетов по модулю 5:

$$(0),\ (1),\ (2),\ (3),\ (4).$$

Определим действия сложения и умножения в этом множестве следующим образом: суммой и произведением двух элементов (r) и (s) назовем тот класс, которому принадлежат сумма $r+s$ и произведение rs.

Так, например,

$$(0)+(1)=(1),\ (2)+(4)=1,\ (2)\cdot(4)=(3),\ (3)(2)=(1) \text{ и т. д.}$$

Нетрудно проверить, что мы получили кольцо. Проверим, например, справедливость закона ассоциативности сложения: $(r)+[(s)+(p)]$ есть класс, которому принадлежит сумма $r+(s+p)$, а $[(r)+(s)]+(p)$ есть класс, которому принадлежит сумма $(r+s)+p$; так как

$$r+(s+p)=(r+s)+p,$$

то получается один и тот же класс. Аналогично проверяются прочие законы действий. Аксиома обратного действия также выполняется: условию

$$(r)+(x)=(s)$$

удовлетворяет единственный класс (x), которому принадлежит разность $s-r$. Нулем в этом кольце является класс (0).

Вместо числа 5 можно взять любое натуральное число.

Заметим, что если взять составное число, например, $p=6$, то получится кольцо с делителями нуля, так, например,

$$(3)\ (2)=(0).$$

Положив $p=2$, получим кольцо, состоящее лишь из двух элементов (0) и (1). Обозначим Ч$=(0)$, Н$=(1)$. Ясно, что к классу Ч относятся все четные числа, а к классу Н — все нечетные числа. Действия в этом кольце

$$\text{Ч}+\text{Ч}=\text{Ч},\ \text{Ч}+\text{Н}=\text{Н}+\text{Ч}=\text{Н},\ \text{Н}+\text{Н}=\text{Ч};$$
$$\text{Ч}\cdot\text{Ч}=\text{Ч},\ \text{Ч}\cdot\text{Н}=\text{НЧ}=\text{Ч},\ \text{Н}\cdot\text{Н}=\text{Н}$$

выражают известные правила: „Сумма двух четных чисел есть четное число", „Сумма четного и нечетного есть нечетное число" и т. д.

§ 81. Понятие поля

Определение. *Полем называется такое кольцо, содержащее хотя бы один элемент, отличный от нуля, в котором выполняется следующая аксиома обратного действия для умножения.*

7. Для произвольных двух элементов a и b, из которых $a\neq 0$, существует единственный элемент x, удовлетворяющий условию

$$ax=b.$$

Элемент x называется частным от деления b на a и обозначается так: $x=\frac{b}{a}$.

Как и во всяком кольце, в поле выполняются аксиомы 1—6.

Аксиома 7 выполняется не во всяком кольце, т. е. *не всякое кольцо есть поле* (например, кольцо целых чисел, кольцо многочленов).

Непротиворечивость аксиом поля следует из существования конкретных полей, достаточно указать на известные числовые поля, например, на поле рациональных чисел.

Операция деления на нуль в поле не рассматривается по той же причине, что и в множестве рациональных чисел (см. стр. 22).

Присоединение новой аксиомы 7 влечет за собой (в качестве следствий) ряд предложений, имеющих место во всяком поле (но не во всяком кольце).

Теорема. *Во всяком поле существует единственный элемент „единица" данного поля, удовлетворяющий следующему условию:*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \tag{1}$$

где a — произвольный элемент поля.

Доказательство аналогично доказательству существования нуля в кольце. В силу аксиомы 7 для данного элемента $a \neq 0$ существует единственный элемент x, удовлетворяющий условию $ax = a$. Обозначив $x = 1$, покажем, что для всякого другого элемента b имеет место соотношение:

$$b \cdot 1 = 1 \cdot b = b.$$

Имеем (ср. стр. 240):

$$b = ay \text{ и } b \cdot 1 = 1 \cdot b = 1 \cdot (ay) = (1 \cdot a) y = ay = b, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. *Для всякого элемента $a \neq 0$ поля существует единственный элемент a^{-1}, называемый обратным относительно a, удовлетворяющий условию:*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Доказательство. Существование и единственность обратного элемента непосредственно вытекают из аксиомы 7 (положить $b = 1$ и обозначить $x = a^{-1}$).

Теорема. *Произведение двух элементов поля равно нулю в том и только в том случае, если по крайней мере один из сомножителей равен нулю, т. е. поле не имеет делителей нуля.*

Доказательство. Если $a = 0$, то $ab = 0$ при любом b (теорема на стр. 241), если $a \neq 0$ и $ab = 0$, то, умножив обе части на a^{-1}, получим:

$$a^{-1} \cdot ab = b = 0 \text{ или } 1 \cdot b = b = 0, \text{ ч. т. д.}$$

Примеры.

1. Ряд полей был рассмотрен в предыдущих главах: поле рациональных чисел, поле действительных чисел, поле чисел вида $a + b\sqrt{2}$, поле комплексных чисел, поле рациональных функций.

2. Кольцо, состоящее из двух элементов Ч и Н (см. пример 5, стр. 244), образует поле. Рассматривая таблицу сложения и умножения

$$\text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}; \quad \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н} + \text{Ч} = \text{Н}; \quad \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч};$$
$$\text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч}; \quad \text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Ч}; \quad \text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Н},$$

видим, что Ч и Н суть нуль и единица (соответственно), аксиома 7 выполняется: уравнение $\text{Н} \cdot x = b$ имеет единственное решение, $x = \text{Ч}$, если $b = \text{Ч}$ и $x = \text{Н}$, если $b = \text{Н}$.

3. Кольцо функций, определенных на данном сегменте (пример 3, стр. 242), не есть поле. В самом деле, это кольцо имеет делители нуля.

4. Кольцо может содержать единицу, но не быть полем. Примером может служить кольцо всех целых чисел.

§ 82. Изоморфизм колец и полей

Определение. *Два кольца R и R' называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором для любых двух элементов a и b из кольца R и соответствующих им элементов a' и b' из кольца R':*

1° *сумме $a+b$ соответствует сумма $a'+b'$;*

2° *произведению ab соответствует произведение $a'b'$.*

Таким образом, при сложении и умножении любых элементов одного кольца и соответствующих им элементов изоморфного кольца в результате всегда будут получаться соответственные элементы.

Следствие. Нулю кольца R соответствует нуль изоморфного кольца R'. В самом деле, пусть a и 0 и a', $0'$ — соответственные элементы данных колец, имеем:

$$a+0=a;$$

переходя к соответственным элементам, получим:

$$a'+0'=a',$$

значит $0'$ есть нуль кольца R'.

Аналогично устанавливаются следующие положения: элементу $-a$ соответствует элемент $-a'$, разности $a-b$ соответствует разность $a'-b'$; если R есть поле, то R' также есть поле. В последнем случае говорят, что данные поля изоморфны. Единица поля соответствует единице изоморфного поля.

Элементы двух изоморфных колец (в частности полей) могут иметь различную природу, однако *оба кольца имеют одну и ту же алгебраическую структуру: всякое предложение относительно операций над элементами в одном кольце будет справедливо и для любого изоморфного ему кольца (надо лишь заменить элементы данного кольца соответственными элементами изоморфного кольца).* С точки зрения алгебры, абстрагирующейся от природы элементов, над которыми выполняются алгебраические операции, изоморфные кольца (в частности поля) не считаются различными, а рассматриваются лишь как *разные представители одного и того же кольца* (в частности поля). Иначе говоря, *конкретные изоморфные кольца рассматриваются как различные интерпретации (модели, толкования) одного и того же кольца.*

Примеры:

1. Кольцо степеней числа 2, рассмотренное в примере 4 (стр. 242), изоморфно кольцу целых чисел. В самом деле, поставим числу 2^m во взаимно однозначное соответствие показатель степени m, операциям $\overset{*}{+}$ и $\overset{*}{\times}$ поставим в соответствие в кольце целых чисел обычные операции сложения и умножения. Имеем:

$$2^m \overset{*}{+} 2^n = 2^{m+n}, \quad 2^m \overset{*}{\times} 2^n = 2^{mn}$$

в кольце целых чисел имеем соответственные числа $m+n$ и mn.

Таким образом, рассматриваемое кольцо интереса для специального изучения не представляет.

Этот изоморфизм имеет применение в теории логарифмов (вместо числа 2 можно взять любое основание $a > 0$ и $a \neq 1$ и рассматривать не только целые степени основания) и позволяет заменить действие умножения действием сложения.

2. В ряде учебников (преимущественно в старых) множество рациональных чисел строится так. Сперва рассматриваются „арифметические числа" (числа без знаков). Затем вводятся „относительные" числа (числа со знаками): положительные, отрицательные и нуль. Действия над „относительными" числами устанавливаются по известным правилам. Всякому „положительному" числу $(+a)$ соответствует „арифметическое" число a. Сопоставим правила действий над „арифметическими" и над „положительными" числами:

если $$a+b=c \text{ и } ab=d,$$

то $$(+a)+(+b)=(+c) \text{ и } (+a)(+b)=(+d).$$

Соответствие результатов показывает, что множество „положительных" чисел изоморфно множеству „арифметических" чисел. Таким образом, нет необходимости различать „числа без знаков" и числа „положительные" *.

3. Построение множества рациональных чисел можно осуществить разными способами. Одним из весьма распространенных способов является „теория аддитивных пар". В этой теории рассматривают пары (a, b), где a и b — любые положительные числа. Две пары (a, b) и (a_1, b_1) считаются равными, если $a+b_1=a_1+b$.

Действия над парами определяются так:

$$(a, b)+(a_1, b_1)=(a+a_1,\ b+b_1);$$
$$(a, b)(a_1, b_1)=(aa_1+bb_1,\ ab_1+a_1b).$$

Доказывается, что если заменить пары-компоненты любыми равными им парами, то получатся сумма и произведение, равные прежним сумме и произведению. Проверяется, что остаются в силе законы действий (предлагаем это сделать читателю в виде упражнения).

Поставим в соответствие паре (a, b), а также всем равным ей парам положительное число $d=a-b$, если $a > b$; отрицательное число $-d=-(b-a)=a-b$, если $b > a$, и число нуль, если $a=b$. Это соответствие есть изоморфизм. Пусть, например, $a-b=c$, и $b_1-a_1=d$; имеем:

$$(a, b)+(a_1, b_1)=(a+a_1,\ b+b_1);$$

паре (a, b) соответствует число c, паре (a_1, b_1) число d, а паре $(a+a_1, b+b_1)$ соответствует число $(a+a_1)-(b+b_1)=(a-b)+(a_1-b_1)$, т. е. сумма $c+(-d)$.

Аналогично рассматриваются все прочие возможные случаи сложения и умножения **.

Установленный изоморфизм позволяет в основу построения множества рациональных чисел положить теорию пар, в которой под новым числом подразумевается объект, определяемый всякой парой (a,b) положительных чисел, при этом считают, что равные пары определяют одно и то же число.

Теория пар и изложенная в гл. 1 теория рациональных чисел (в силу установленного изоморфизма) суть лишь различные способы построения одного и того же множества рациональных чисел. Аналогично существуют

---

* С чисто педагогической точки зрения это различие не только не необходимо, но п о р о ч н о, так как оно вызывает ничем не оправдываемые трудности.

** Надо ясно представлять, что изоморфизм устанавливается не между парами и рациональными числами, а между множествами равных пар и рациональными числами.

различные способы построения поля действительных и поля комплексных чисел.

4. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждому комплексному числу сопряженное ему комплексное число

$$a + bi \longleftrightarrow a - bi;$$

как известно, при выполнении одних и тех же действий над сопряженными числами получаются сопряженные результаты. Значит, это соответствие есть изоморфизм. В этом изоморфизме поле комплексных чисел ставится в соответствие самому себе — отображается на себя.

Соответствие, в котором кольцо изоморфно отображается на себя, называется автоморфизмом данного кольца (или поля).

Существование неизоморфных колец и полей можно установить на примерах различных числовых множеств. Так, например, множество всех рациональных чисел и множество всех действительных чисел суть неизоморфные поля (будучи полями, они являются и кольцами). В самом деле, множество всех рациональных чисел счетно, а множество всех действительных чисел несчетно (мощности континуума); как известно, между этими множествами не может быть установлено взаимно однозначное соответствие, в частности не может быть установлен и изоморфизм.

Существование неизоморфных полей означает, что система аксиом (поля) не является полной. Требования, содержащиеся в аксиомах поля, могут быть реализованы на алгебраически различных (неизоморфных) моделях, и, следовательно, эти требования не определяют единственного поля. Система аксиом кольца содержит меньшее число требований, а потому и подавно не является полной *. Различные конкретные кольца и поля кроме общих свойств, вытекающих из аксиом, обладают индивидуальными свойствами, из аксиом не вытекающими.

В современной алгебре рассматриваются множества с установленными в них операциями, характеризующиеся как большим (например, специальные виды колец и полей), так и меньшим (например, группы) числом аксиом по сравнению с системами аксиом кольца и поля.

---

* Примером полной системы аксиом могут служить аксиомы геометрии Эвклида (или Лобачевского). Хотя аксиомы геометрии Эвклида можно реализовывать на различных моделях, но все эти интерпретации изоморфны (это доказывается в основаниях геометрии). См. книги: Б. В. Кутузов., «Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии»; В. И. Костин, «Основания геометрии».

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 83. Общие понятия

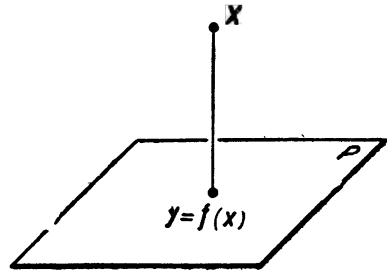
В настоящем параграфе дается краткое (конспективное) перечисление тех основных понятий и положений, относящихся к общему учению о функциях, которые необходимы для теории элементарных функций. Достаточно полное и систематическое изложение общего учения о функциях содержится в учебниках и пособиях по курсу высшей математики. Не имея в виду повторять материал этих учебников, мы считаем необходимым лишь поставить в поле зрения читателя комплекс необходимых общих сведений, а также установить терминологию, которая будет применяться в дальнейшем.

Общее понятие функции

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два множества, элементами которых могут быть любые объекты. *Если каждому элементу x множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие некоторый элемент y множества $\mathfrak{N}$, то говорят, что задана функция*

$$y=f(x).$$

Элементы x множества $\mathfrak{M}$ называются значениями аргумента, а соответствующие элементы y множества $\mathfrak{N}$ — значениями функции. Множество $\mathfrak{M}$ называется областью определения функции или множеством значений (допустимых) аргумента. Множество соответствующих значений $y=f(x)$ называется множеством значений функции.



Черт. 98.

Примеры: 1. Процесс измерения отрезков (или углов) ставит в соответствие (по определенному правилу) всякому отрезку (углу) число — его меру. Следовательно, длина отрезка (мера угла) есть функция отрезка (угла). Здесь значения аргумента суть отрезки (углы), а значения функции—числа.

2. Площадь многоугольника есть функция многоугольника. Здесь значения аргумента — многоугольники, а значения функции — числа.

3. При ортогональном проектировании на данную плоскость P всякой точке x пространства ставится в соответствие точка y плоскости P (черт. 98). Здесь значения аргумента суть точки пространства, а значения функции — точки плоскости.

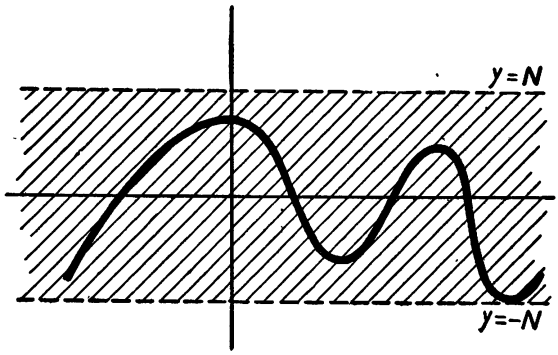
В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом числовые действительные функции от действительного аргумента. Для этих функций множество $\mathfrak{M}$ — область определения, есть некоторое множество действительных чисел, значения функции суть действительные числа, а потому и множество значений функции есть также некоторое множество действительных чисел.

Ниже сформулирован ряд определений, относящихся к действительным функциям от действительного аргумента.

Ограниченные функции

Функция $f(x)$ называется ограниченной на данном промежутке (содержащемся в области ее определения), если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство.

$$|f(x)| < N$$ (Черт. 99).



Черт. 99.

Если числа N, удовлетворяющего этому условию, не существует, то функция $f(x)$ называется неограниченной.

Если в данном промежутке выполняется неравенство

$$f(x) < M \quad (\text{или } f(x) > M),$$

где M — некоторое число (не обязательно положительное), то функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) в данном промежутке.

Монотонные функции

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на данном промежутке, если при произвольных двух различных значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

для возрастающей функции (черт. 100) *и*

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

для убывающей функции (черт. 101).

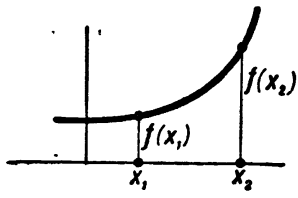
Функция возрастающая и убывающая в некотором промежутке называется монотонной в этом промежутке.

Примечание I. К монотонным функциям относятся также функции неубывающая и невозрастающая. Первая характеризуется условием

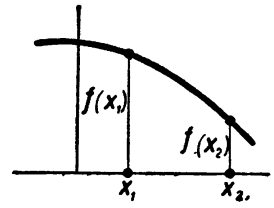
$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2,$$

а вторая условием

$$f(x_1) \geqslant f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2.$$



Черт. 100.



Черт. 101.

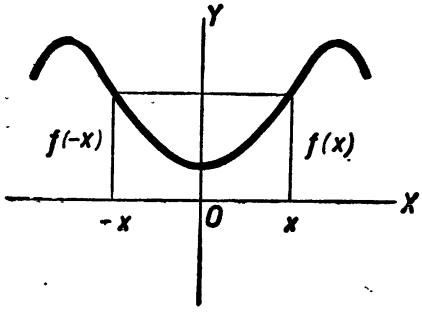
Примечание II. Можно рассматривать ограниченные и монотонные функции не только в промежутке, но на любом числовом множестве, содержащемся в области определения.

Четные и нечетные функции

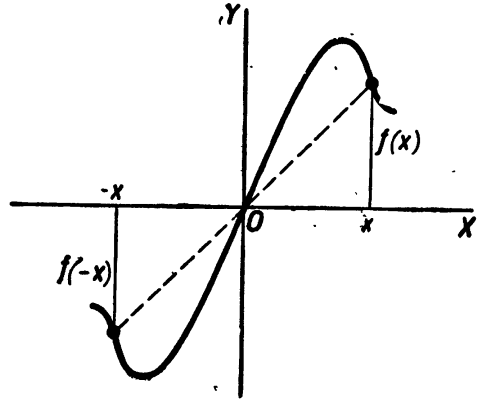
Функция $f(x)$ называется четной (нечетной), если ее значения равны (противоположны) при произвольных двух противоположных значениях аргумента:

$f(x) = f(-x)$ *для четной функции* (черт. 102)

$f(x) = -f(-x)$ *для нечетной функции* (черт. 103).



Черт. 102.



Черт. 103.

График четной функции симметричен относительно оси OY, а нечетной функции относительно начала координат.

Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число l (хотя бы одно) такое, что при любом значении аргумента x значения функции в точках

$$x,\ x \pm l,\ x \pm 2l, \ldots,\ x + kl$$

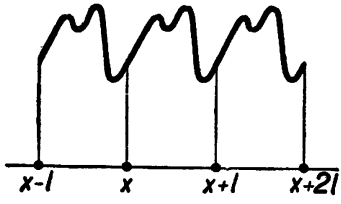
(k — любое целое число) равны:

$$f(x) = f(x \pm l) = f(x \pm 2l) = \ldots = f(x + kl).$$

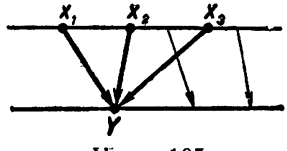
Для изучения свойств периодической функции достаточно исследовать ее на любом сегменте, например, на сегменте $[0, l]$, охватывающем ее период (черт. 104).

Взаимно обратные функции

Соответствие между значениями аргумента и значениями функций может не быть взаимно однозначным, именно всякому значению аргумента соответствует единственное значение функции, тогда как всякое данное значение функция может иметь при нескольких (быть может, при бесконечном множестве) значениях аргумента (черт. 105). Например, значение 4 функция $y = x^2$ имеет при двух значениях аргумента $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Если всякому данному значению функции y поставить в соответствие все значения аргумента x, при которых $y = f(x)$, то в общем случае такое соответствие не определяет функцию. В самом деле, в общем случае нарушается основное требование: данному значению y соответствует не одно, а некоторое множество значений x.



Черт. 104.



Черт. 105.

В частных случаях функция $y = f(x)$ может быть такой, что всяким двум различным значениям аргумента соответствуют два различные значения функции, тогда каждому значению y функции можно поставить в соответствие одно единственное число x, то самое, при котором значение функции $f(x)$ равно y. В рассматриваемом случае между множествами значений аргумента и значений функции устанавливается взаимно однозначное соответствие. Следовательно, x можно рассматризать как функцию от аргумента y:

$$x = \bar{f}(y).$$

Областью определения функции $\bar{f}(y)$ является множество значений функции $f(x)$.

Определение. *Функции*

$$y=f(x) \text{ и } x=\bar{f}(y),$$

устанавливающие взаимно однозначное соответствие между множествами значений x и y, называются взаимно обратными.

Теорема. *Всякая возрастающая (или убывающая) функция имеет обратную функцию. При этом обратная функция также возрастает (убывает).*

Доказательство. Допустим для определенности, что функция $y=f(x)$ возрастает.

Рассмотрим любые два различные значения аргумента. Пусть, например, $x_1<x_2$. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а потому имеем:

$$y_1<y_2, \text{ где } y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2).$$

Итак, двум различным значениям аргумента x соответствуют два различные значения функции y, следовательно, обратная функция

$$x=\bar{f}(y)$$

существует. Покажем, что функция $\bar{f}(y)$ возрастает. Пусть $y_1<y_2$; имеем: $f(x_1)<f(x_2)$. В силу возрастания функции $f(x)$, последнее неравенство возможно лишь, если $x_1<x_2$ или, что то же,

$$\bar{f}(y_1)<\bar{f}(y_2) \text{ при условии } y_1<y_2,$$

значит, $f(y)$ возрастает.

Для убывающей функции доказательство проводится аналогично, ч. т. д.

Принцип продолжения по непрерывности

Пусть $y=f(x)$ — функция, заданная формулой, где $f(x)$ — некоторое аналитическое выражение.

Если при непосредственной подстановке значения $x=a$ аналитическое выражение $f(x)$ теряет смысл, но предел (конечный) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ существует, то (как известно из теории пределов) принято значение $x=a$ включать в область определения функции, при этом считается

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Это дополнительное определение называется принципом продолжения по непрерывности, так как при данном соглашении мы получим функцию, непрерывную в точке a.

Так, например, выражение $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при подстановке $x=0$ теряет смысл, но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, поэтому следует считать $f(0)=1$.

Глава VIII

СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 84. Обобщение понятия степени

По определению степени как произведения равных сомножителей символ a^n имеет смысл только при натуральном n (так как перемножать можно лишь натуральное число сомножителей). Символы же a^0, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\sqrt{2}}$ и т. п. не имеют смысла, ибо не имеет смысла умножать число a само на себя 0, или -1, или $\frac{1}{2}$, или $\sqrt{2}$ раз.

Символу a^n, где n не является натуральным числом, можно придать смысл лишь по определению, условившись приписывать ему вполне определенное значение в случае, когда n не есть натуральное число.

Известны следующие основные свойства степени:

$$\begin{cases} \text{(I)} & a^n a^m = a^{n+m}, \\ \text{(II)} & (a^m)^n = a^{nm}, \end{cases}$$

(где n и m натуральные числа). Будем руководствоваться следующим принципом:

При обобщении понятия степени должны сохраниться свойства I и II.

Нулевой показатель. Если (пока формально) в соотношении (I) положить $m=0$, то получим:

$$a^n a^0 = a^n.$$

Если $a \neq 0$, то находим единственное возможное значение $a^0 = 1$. Это рассуждение не является доказательством равенства $a^0 = 1$ (так как при $m=0$ выражение a^m утрачивает смысл), оно лишь показывает, какое определение следует принять для a^0, чтобы сохранилось свойство (I).

Определение. *Если $a \neq 0$, то условимся считать $a^0 = 1$. Символу 0^0 условимся не приписывать никакого численного значения.*

Справедливость свойства (II) проверяется непосредственно:

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^{0 \cdot n}, \quad (a^m)^0 = 1 = a^{0 \cdot m}, \quad (a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^{0 \cdot 0}.$$

Отрицательный показатель. Если в равенстве (I) положить $m = -n$, то получим:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1.$$

Откуда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (где $a \neq 0$). Чтобы сохранилось свойство (I), примем

определение: *Если $a \neq 0$, то условимся считать $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.*

Свойство (I) сохраняется при любых целых n и m. Пусть, например, число n положительно, а m отрицательно, $m=-m_1$; имеем:

$$a^n a^m = a^n a^{-m_1} = a^n \frac{1}{a^{m_1}} = \frac{a^n}{a^{m_1}} =$$

$$= \begin{cases} a^{n-m_1} & (\text{если } n > m) \\ \dfrac{1}{a^{m_1-n}} & (\text{если } n < m_1). \end{cases}$$

Но во втором случае

$$\frac{1}{a^{m_1-n}} = a^{-(m_1-n)} = a^{n-m_1}.$$

Итак, в обоих случаях

$$a^n a^m = a^{n-m_1} = a^{n+(-m_1)} = a^{n+m}.$$

Прочие возможные случаи предлагаем разобрать учащимся.

Справедливость свойства (II) проверяется непосредственно. Пусть, например, оба показателя отрицательны, тогда имеем

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)}.$$

Прочие возможные случаи предлагаем разобрать учащимся.

Дробный показатель. Пусть a — положительное действительное число. Положим, в равенстве (II) $m=\frac{1}{n}$, тогда получим (формально): $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$.

Определение. *Если* $a > 0$, *то условимся считать*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Из определения следует, что $(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$. Покажем, что выражения $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ и $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ имеют одно и то же значение. В самом деле,

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{и} \quad (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

поэтому естественно принять следующее ***определение:***

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Теорема. *Если* $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, то и $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}$.

Доказательство. Имеем $mn_1 = m_1 n$, следовательно,

$$a^{mn_1} = a^{m_1 n} \quad \text{и} \quad \sqrt[nn_1]{a^{mn_1}} = \sqrt[nn_1]{a^{m_1 n}},$$

откуда $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}$; ч. т. д.

Проверим справедливость свойств (I) и (II) для произвольных положительных дробных степеней. Положим $n=\frac{p}{q}$, $m=\frac{r}{s}$, имеем:

I. $a^{\frac{p}{q}}\,a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\,\sqrt[qs]{a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

II. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}=\sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}=\sqrt[sq]{a^{pr}}=a^{\frac{pr}{sq}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$.

Понятие степени для дробного отрицательного показателя распространяется при помощи определения: $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$.

Примечание. Если придерживаться определения $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ и при отрицательном a, то $a^{\frac{1}{n}}$ (при $a<0$) следует рассматривать лишь для нечетных значений n, ибо при n четном $\sqrt[n]{a}$ не имеет смысла (в поле действительных чисел). Выражения $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ и $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, совпадающие при $a>0$, могут оказаться не тождественными, если $a<0$. В самом деле, пусть, например, $a=-2$, $n=2$, $m=4$, тогда $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=(\sqrt{-2})^4$ не имеет смысла. Но $(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{(-2)^4}=\sqrt{16}=4$. Дробь $\frac{m}{n}=\frac{4}{2}$ сократима и равна 2, поэтому $a^{\frac{m}{n}}=a^2=(-2)^2=4$. При тех же числовых данных $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=(\sqrt[4]{-2})^2$ не имеет смысла, тогда как $(a^n)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[4]{(-2)^2}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$. Дробь $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ и $a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ не имеет смысла. Поэтому, если рассматривают $a^{\frac{m}{n}}$ при отрицательном a, то предполагается, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а знаменатель $n=2k+1$ нечетное число, тогда $\left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^m=(a^m)^{\frac{1}{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{a^m}$.

§ 85. Степенная функция с рациональным показателем

Определение. *Степенной функцией называется функция, заданная формулой $y=x^n$, где x — аргумент, n — данное число и допустимыми значениями считаются все те значения аргумента, при которых выражение x^n имеет смысл.*

Степенная функция с натуральным показателем. Пусть n — натуральное число.

1° *Степень x^n имеет смысл при всех действительных значениях x, поэтому область определения (множество допустимых значений аргумента) есть множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, \infty)$.*

2° *Функция x^n возрастает в промежутке $0 \leqslant x < \infty$.*

Доказательство. Требуется доказать, что при произвольных двух неотрицательных значениях аргумента x большему значению аргумента соответствует большее значение функции x^n.

В самом деле, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то по закону монотонности умножения имеем:

$$x_1^2 < x_2^2,\ x_1^3 < x_2^3,\ \ldots,\ x_1^n < x_2^n,\ \text{ч. т. д.}$$

3° *Пусть k — произвольное данное неотрицательное число, в промежутке $0 \leqslant x < \infty$ существует единственное значение $x = \sqrt[n]{k}$, при котором значение функции $y = x^n$ равно k.*

Доказательство дано в § 44 (извлечение корня).

4° *Каким бы большим ни было задано число $N > 0$, при всех достаточно больших значениях x имеет место неравенство $x^n > N$.*

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty.$$

Доказательство. В самом деле, неравенство $x^n > N$ имеет место (в силу 2°) при $x > \sqrt[n]{N}$.

Совокупность свойств 2° — 4° кратко выражают следующим утверждением: *в промежутке $0 \leqslant x < \infty$ функция $y = x^n$ возрастает от 0 до ∞.*

5° *При n четном, $n = 2k$, функция $x^n = x^{2k}$ является четной.*

В самом деле, значения функции x^{2k} в противоположных точках x и $-x$ одинаковы:

$$(-x^2)^k = x^{2k}.$$

В промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ функция x^{2k} убывает. В самом деле, пусть $x_1 < x_2 \leqslant 0$, тогда противоположные числа $-x_1$ и $-x_2$ неотрицательны и $0 \leqslant -x_2 < -x_1$, следовательно (в силу 2°),

$$(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}.$$

Но так как $(-x_1)^{2k} = x_1^{2k}$ и $(-x_2)^{2k} = x_2^{2k}$, то

$$x_1^{2k} > x_2^{2k}.$$

Итак, большему значению аргумента в промежутке $(-\infty, 0]$ соответствует меньшее значение функции, т. е. x^{2k} убывает в этом промежутке.

При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях x имеет место неравенство $x^{2k} > N$ (где $N > 0$ —

любое заданное число). Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty.$$

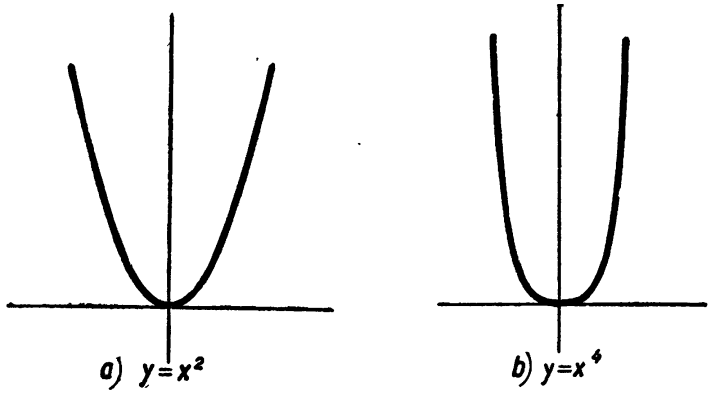
На чертеже 106 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

6° *При n нечетном $n = 2k+1$, функция $x^n = x^{2k+1}$ является нечетной.*

В самом деле, значения x^{2k+1} и $(-x)^{2k+1}$ суть противоположные числа:

$$(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}.$$

В промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ функция x^{2k+1} возрастает. В самом деле, при $x_1 < x_2 \leqslant 0$ имеем: $(-x_1)^{2k+1} > (-x_2)^{2k+1}$ или, что то же, $-x_1^{2k+1} > -x_2^{2k+1}$, откуда $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.



Черт. 106.

Будучи возрастающей в промежутках $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$, функция x^{2k+1} возрастает во всем интервале $(-\infty, \infty)$.

При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях x и при любом заданном N будет иметь место неравенство $x^{2k+1} < -N$, что символически записывается так:

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty.$$

Итак, в интервале $(-\infty, \infty)$ функция x^{2k+1} возрастает от $-\infty$ до ∞.

Графики функций $y = x$ и $y = x^3$ представлены на чертеже 107.

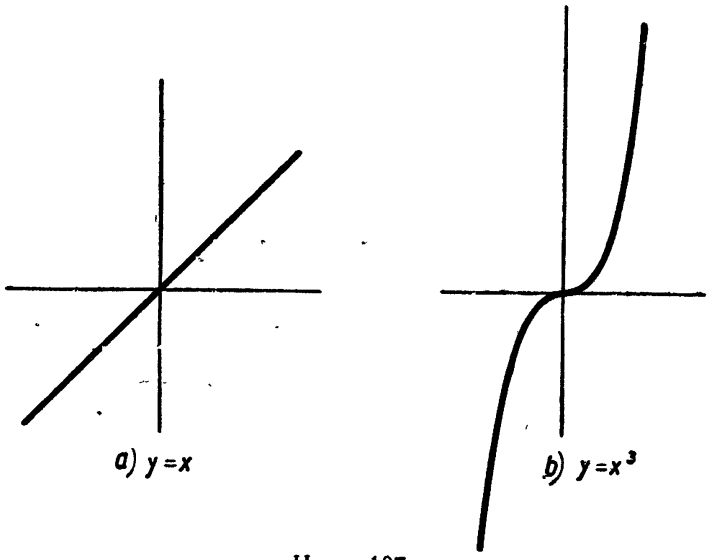
Степенная функция с целым отрицательным показателем. Положим, $n = -k$, где k — натуральное число, и рассмотрим функцию $y = x^n = \frac{1}{x^k}$.

1° Выражение $\frac{1}{x^k}$ теряет смысл лишь при $x = 0$, поэтому область определения данной функции есть множество всех действительных чисел, отличных от нуля, т. е. оно состоит из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ (число 0 исключается).

2° В интервале $(0, \infty)$ x^k возрастает, следовательно, $y=\frac{1}{x^k}$ убывает. В самом деле, при $0<x_1<x_2$ имеем $0<x_1^k<x_2^k$, откуда $\frac{1}{x_1^k}>\frac{1}{x_2^k}$.

3° *Пусть p — произвольное данное положительное число, в интервале $(0, \infty)$ существует единственное значение аргумента, при котором значение функции $y=\frac{1}{x^k}$ равно p.*

Доказательство. Если $\frac{1}{x^k}=p$, то $x^k=\frac{1}{p}$, откуда $x=\frac{1}{\sqrt[k]{p}}$,



Черт. 107.

4° *Каким бы (малым) ни было заданное число $\varepsilon>0$, при всех достаточно больших x имеет место неравенство $0<y<\varepsilon$.* Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}=0.$$

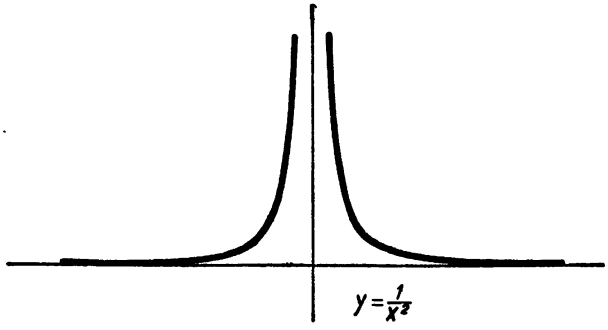
Доказательство. Имеем: $\lim_{x\to\infty} x^k=\infty$, следовательно, при достаточно больших x будет выполняться неравенство $x^k>\frac{1}{\varepsilon}$, но тогда $\frac{1}{x^k}<\varepsilon$, ч. т. д.

5° *Каким бы (большим) ни было наперед задано число $N>0$, при всех достаточно малых положительных значениях x выполняется неравенство $\frac{1}{x^k}>N$.* Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to 0} x^{-k}=\infty \text{ (где } x>0).$$

Доказательство. При всех положительных значениях x, меньших $\frac{1}{\sqrt[k]{N}}$ будем иметь $x^{-k}=\frac{1}{x^k}>\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[k]{N}}\right)^k}=N$, ч. т. д.

Свойства 2°, 3°, 4° и 5° выражают следующим утверждением: *в интервале* $0<x<\infty$ *функция* $y=x^{-k}$ *убывает от* ∞ *до* 0.

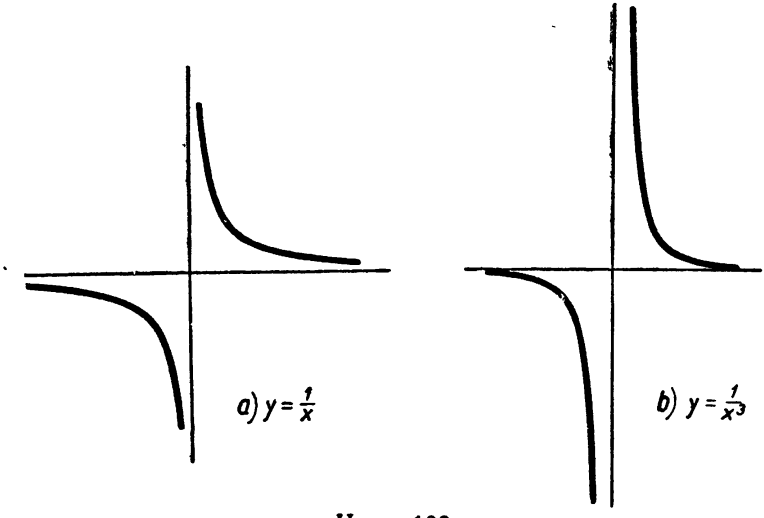


Черт. 108.

6° *При четном* $k=2l$ *функция* x^{-k} *четная*:

$$(-x)^{-k}=\frac{1}{(-x)^{2l}}=\frac{1}{x^{2l}}=x^{-k}.$$

В интервале $-\infty<x<0$ *функция* $y=x^{-k}$ *возрастает от* 0 *до* ∞ (подробные рассуждения предлагаем провести учащимся). На чертеже 108 представлен график функции $y=x^{-2}$.



Черт. 109.

7° *При нечетном* $k=2l+1$ *функция* x^{-k} *нечетная*:

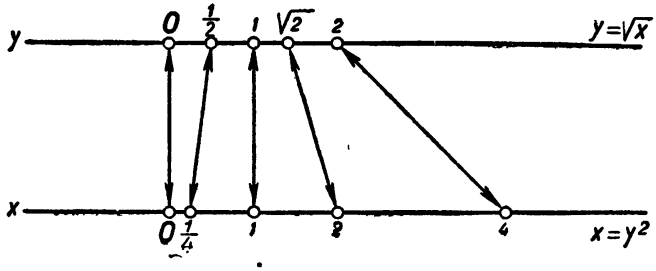
$$(-x)^{-(2l+1)}=-x^{-(2l+1)}.$$

В интервале $(-\infty, 0)$ *эта функция убывает от* 0 *до* $-\infty$. Графики функции $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{x^3}$ представлены на чертеже 109.

Степенная функция с дробным показателем. Положим $n=\frac{1}{k}$, где k — натуральное число, и рассмотрим функцию

$$y=x^n=\sqrt[k]{x}$$

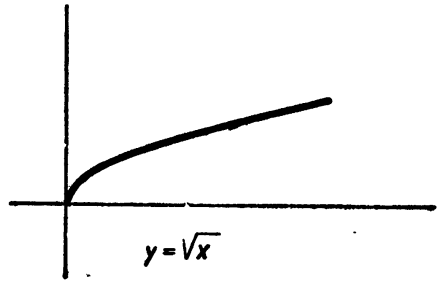
в промежутке $0\leqslant x<\infty$. В силу теоремы о существовании корня (см. § 44), каждому неотрицательному значению x соответствует единственное неотрицательное значение y. Обратно, каждому значению y



Черт. 110.

соответствует единственное значение x, определяемое по формуле $x=y^k$. Таким образом, между значениями x и y имеет место взаимно однозначное соответствие. На чертеже 110 изображена схема этого соответствия для $k=2$. Функции $y=\sqrt[k]{x}$ и $x=y^k$ являются взаимно обратными.

Так как в промежутке $0\leqslant y<\infty$ функция $x=y^k$ возрастает, то и обратная функция $y=\sqrt[k]{x}$ возрастает в промежутке $0\leqslant x<\infty$. В этом промежутке функция $y=\sqrt[k]{x}$ возрастает от 0 до ∞. В самом деле, во-первых, при $x=0$ и $y=0$, во-вторых, любое данное положительное значение b функция имеет в точке $x=b^k$ и, в-третьих, $y=\sqrt[k]{x}>N$, если $x>N^k$ (где $N>0$ — любое заданное число), т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[k]{x}=\infty$.



Черт. 111.

Для построения графика функции $y=\sqrt[k]{x}$ достаточно построить график функции $x=y^k$ для положительных значений y. Так, при $k=2$ имеем $y=\sqrt{x}$, графиком является ветвь параболы, изображенной на чертеже 106, но расположенная, как показано на чертеже 111.

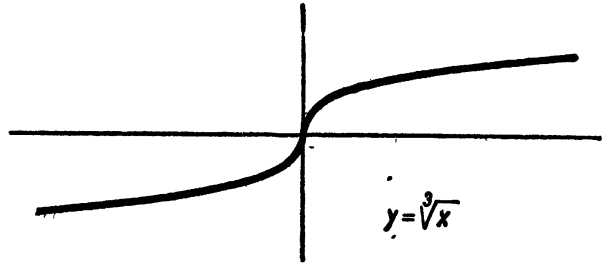
Исследование функции $y=x^{\frac{p}{q}}$ (где дробь $\frac{p}{q}$ предполагается несократимой) в промежутке $0\leqslant x<\infty$ не представляет затруднений. В самом деле, $y=\sqrt[q]{x^p}$, и мы можем разбить вычисление значения y на два шага:

$$u=x^p \quad \text{и} \quad y=\sqrt[q]{u}.$$

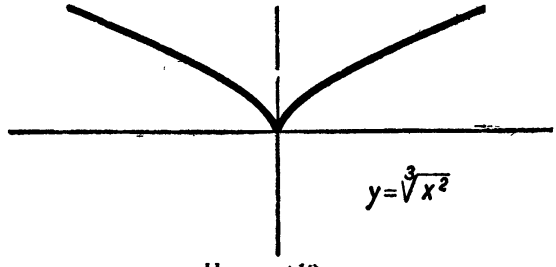
В интервале $(-\infty, 0)$ функция $y=x^{\frac{p}{q}}$ при четном q не имеет смысла. При нечетном q имеем:

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\begin{cases} x^{\frac{p}{q}} & \text{(если } p \text{ четное)} \\ -x^{\frac{p}{q}} & \text{(если } p \text{ нечетное).} \end{cases}$$

Построив график функций $y=x^{\frac{p}{q}}$ в промежутке $0 \leqslant x < \infty$, не представляет затруднений построить график и для отрицательных x.



Черт. 112.



Черт. 113.

На чертежах 112 и 113 представлены соответственно графики функций

$$y=x^{\frac{1}{3}} \text{ и } y=x^{\frac{2}{3}}.$$

При дробном отрицательном n функцию $y=x^n$ можно исследовать тем же способом, как и при целом отрицательном n, приняв во внимание, что $x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$.

§ 86. Показательная функция на множестве рациональных чисел

Пусть $a>0$ — данное действительное число, каждому рациональному значению r * соответствует единственное значение a^r, поэтому a^r есть функция аргумента r.

* Степень с иррациональным показателем еще не определена, а потому пока и не может рассматриваться.

Определение. *Функция a^r, где множеством допустимых значений для аргумента r считается множество всех рациональных чисел, называется показательной функцией на множестве рациональных чисел.*

Установим основные свойства функции a^r, предполагая, что основание $a > 1$.

1°

$$a^r \begin{cases} > 1 & (\text{если } r > 0) \\ < 1 & (\text{если } r < 0) \\ = 1 & (\text{если } r = 0) \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), тогда $a^p > 1$, а значит $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{1}$. Если $r = -s < 0$, то $a^r = \frac{1}{a^s} < 1$. Если $r = 0$, то $a^r = 1$, ч. т. д.

2° *a^r возрастает.*

Доказательство. Если $r_1 < r_2$, то имеем:

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}\,(a^{r_2 - r_1} - 1) > 0$$

(ибо $a^{r_2 - r_1} > 1$), откуда $a^{r_2} > a^{r_1}$, ч. т. д.

3° $\lim\limits_{r \to \infty} a^r = \infty$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что при любом заданном (как угодно большом) N можно найти такое натуральное число n, что $a^n > N$, тогда (в силу возрастания a^r) при произвольном рациональном r, большем n, будем иметь и подавно $a^r > N$.

Для доказательства воспользуемся неравенством

$$(1 + h)^n > 1 + nh, \tag{1}$$

где n — любое натуральное число, большее 1, а h — произвольное положительное число (см. § 77, стр. 228).

Так как $a > 1$, то обозначив $a - 1 = h > 0$, имеем: $a = 1 + h$; подставляя в неравенство (1) $1 + h = a$ и $h = a - 1$, получим:

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Выберем натуральное число n настолько большим, чтобы имело место неравенство $1 + n(a - 1) > N$, откуда $n > \frac{N - 1}{a - 1}$. Тогда получим и подавно $a^n > N$, ч. т. д.

4° *При всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство:* $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ — *любое заданное (как угодно малое) число.* Значит, при достаточно больших значениях показателя корня значения $\sqrt[n]{a}$ могут быть сделаны как угодно близкими к 1.

Или символически: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Доказательство. Положив в неравенстве (1) $h=\varepsilon$, получим:

$$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon. \qquad (1)$$

Пусть $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$, тогда $1+n\varepsilon>a$, в силу (1) и подавно $(1+\varepsilon)^n>a$, откуда $1+\varepsilon>\sqrt[n]{a}$ и, следовательно, $0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$, ч. т. д.

Примечание. Свойство 4° может ошибочно показаться очевидным и не требующим доказательства, так как $a^0=1$, а отсюда, казалось бы, и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim a^{\frac{1}{n}}=a^0=1$. Но из равенства $a^0=1$ само по себе не вытекает, что степень a^k при достаточно малых отличных от нуля значениях показателя k может быть сделана как угодно близкой к 1.

5° $\lim\limits_{r\to-\infty}a^r=0$.

Доказательство. Пусть $r=-k$, где $k>0$, покажем, что при всех достаточно больших k будет иметь место неравенство:

$$0<a^{-k}<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ любое заданное (как угодно малое) положительное число. В силу свойства 3° $\lim\limits_{k\to\infty}a^k=\infty$, следовательно, при всех достаточно больших значениях k будем иметь $a^k>\frac{1}{\varepsilon}$, но тогда $0<\frac{1}{a^k}<\varepsilon$, т. е. $0<a^{-k}<\varepsilon$, ч. т. д.

Свойства показательной функции a^r при основании $a<1$ нетрудно изучить, если принять во внимание, что

$$a^r=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r} \text{ и что } \frac{1}{a}>1 \text{ (при } 0<a<1).$$

Так, например, при $0<a<1$ функция a^r убывает. В самом деле, функция $\left(\frac{1}{a}\right)^r$ возрастает, а значит функция a^r убывает. Как нетрудно показать:

$$\lim_{r\to\infty}a^r=0 \text{ и } \lim_{r\to-\infty}a^r=\infty.$$

Наконец, при $a=1$ показательная функция имеет одно и то же значение: $a^r=1^r=1$.

§ 87. Степень с иррациональным показателем

Пусть $\alpha = p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$.* данное иррациональное число, представленное десятичной дробью.

Рассмотрим десятичные приближения α_n^- и α_n^+ числа α с точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Теорема. *Последовательность*

$$\left[a^{\alpha_0^-}, a^{\alpha_0^+}\right], \left[a^{\alpha_1^-}, a^{\alpha_1^+}\right], \ldots, \left[a^{\alpha_n^-}, a^{\alpha_n^+}\right], \ldots \qquad (1)$$

есть последовательность стягивающихся сегментов.

Доказательство. 1° Пусть $a > 1$. Последовательность степеней $a^{\alpha_n^-}$ возрастает, так как α_n^- (см. свойство 2°) возрастает. Аналогично $a^{\alpha_n^+}$ убывает.

2° При всех значениях n имеем $a^{\alpha_n^-} < a^{\alpha_n^+}$, так как $\alpha_n^- < \alpha_n^+$.

3° Разность $a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-}$ при достаточно больших значениях n может быть сделана как угодно малой. В самом деле, имеем:

$$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} = a^{\alpha_n^-}\left(a^{\alpha_n^+ - \alpha_n^-} - 1\right) < a^{p+1}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) = a^{p+1}\left(\sqrt[10^n]{a} - 1\right).$$

В силу свойства 4° (предыдущего §) при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ и при достаточно больших значениях n будем иметь $\sqrt[10^n]{a} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{p+1}}$, но тогда:

$$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

Предлагаем учащимся самостоятельно провести рассуждения для случая $0 < a < 1$.

Определение. *Степенью a^α (где $a > 0$) называется число определенное последовательностью стягивающихся промежутков* (1).

Таким образом, число a^α при $a > 1$ больше всех чисел вида $a^{\alpha_n^-}$ и меньше всех чисел вида $a^{\alpha_n^+}$:

$$a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}.$$

При $0 < a < 1$ имеем:

$$a^{\alpha_n^+} < a^\alpha < a^{\alpha_n^-}.$$

---

* Целая часть p может быть числом отрицательным; так, если $\alpha = -2{,}3751\ldots$, то $\alpha = -2 - 0{,}3751\ldots = -3 + (1 - 0{,}3751\ldots) = -3 + 0{,}6248\ldots = \overline{3}{,}6248\ldots$

Если $a=1$, то $a^x=1$.

Иррациональные степени отрицательных чисел в элементарной математике не рассматриваются.

Пояснение. Будем рассматривать, например, $(-2)^r$ при рациональных значениях показателя r, близких данному иррациональному числу. Пусть $r=\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, тогда

$$(-2)^r \begin{cases} >0 \text{ (если } p \text{ четное, } q \text{ нечетное)} \\ <0 \text{ (если } p \text{ и } q \text{ нечетные)} \\ \text{(не имеет действительных значений, если} \\ p \text{ нечетное, а } q \text{ четное)} \end{cases}$$

Таким образом, не существует вполне определенного действительного числа, к которому близки значения $(-2)^r$ при значениях r, достаточно близких к a.

Теорема. *Свойства степени*

$$\text{(I) } a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta} \text{ и (II) } (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

остаются в силе при любых действительных значениях α и β.

Доказательство. Рассматривая приближенные значения α и β, имеем (при $a>1$):

$$a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}, \quad a^{\beta_n^-} < a^\beta < a^{\beta_n^+},$$

откуда

$$a^{\alpha_n^-} a^{\beta_n^-} < a^\alpha a^\beta < a^{\alpha_n^+} a^{\beta_n^+},$$

или

$$a^{\alpha_n^- + \beta_n^-} < a^\alpha a^\beta < a^{\alpha_n^+ + \beta_n^+}.$$

Но, с другой стороны, $\alpha_n^- + \beta_n^-$ и $\alpha_n^+ + \beta_n^+$ суть приближенные значения суммы $\alpha+\beta$, и единственным числом, бо́льшим всех чисел $a^{\alpha_n^- + \beta_n^-}$, но меньшим всех чисел $a^{\alpha_n^+ + \beta_n^+}$ является $a^{\alpha+\beta}$. Следовательно, $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. Аналогично доказывается справедливость свойства (II), ч. т. д.

§ 88. Показательная функция

Определение. *Функция* $y=a^x$, *где* $a>0$ *и множеством допустимых значений для* x *является множество всех действительных чисел, называется показательной функцией.*

Перечисленные в параграфе 86 свойства $1^\circ - 5^\circ$ показательной функции с рациональным показателем остаются в силе. Так, например, при $a>1$ имеем

$$1^\circ\ a^x > 1 \text{ (если } x>0),$$

В самом деле, возьмем какое-нибудь положительное приближенное значение числа x по недостатку $0<x_n^-<x$, тогда получим:

$$1<a^{x_n^-}<a^x \text{ (где } a>1).$$

Аналогично легко показать, что $a^x<1$, если $x<0$.

Рассуждения, на которых основаны доказательства прочих свойств $2°-5°$, без изменения применимы к показательной функции с произвольным действительным показателем. Следовательно, при $a>1$ функция $y=a^x$ возрастает и $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$; при $a<1$ функция a^x убывает и $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$; при $a=1$ $a^x=1$.

Показательная функция при отрицательном основании a в элементарной математике не рассматривается.

Теорема. *Если $a>0$ и $a\neq 1$, то при любом данном положительном числе N существует единственное действительное число α такое, что α-я степень числа a равна N:*

$$a^\alpha=N.$$

Доказательство. Пусть для определенности $a>1$; как известно, среди значений a^x существуют и как угодно большие и как угодно близкие к нулю. Рассмотрим целые степени числа a:

$$\ldots a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a,\ a^2,\ldots$$

Пусть a^{p+1} наименьшее из этих чисел, большее N, имеем:

$$a^p\leqslant N<a^{p+1}.$$

Разделив сегмент от p до $p+1$ на десять равных частей выберем число q_1 при условии

$$a^{p+\frac{q_1}{10}}\leqslant N<a^{p+\frac{q_1+1}{10}}.$$

Продолжая неограниченно процесс деления сегмента на 10 равных частей, мы получим десятичную дробь, определяющую некоторое действительное число α:

$$\alpha=p,\ q_1q_2\ldots q_n\ldots$$

В силу способа определения десятичных знаков числа α, для любых его приближенных значений имеем:

$$a^{\alpha_n^-}\leqslant N<a^{\alpha_n^+}.$$

Но единственное число, удовлетворяющее этим неравенствам, есть a^α, а потому $a^\alpha=N$.

Если $a<1$, то $\frac{1}{a}>1$, и по доказанному существует единственное число α такое, что $\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}=N$, но тогда $a^{-\alpha}=N$, ч. т. д.

Если $a=1$, то теорема неверна, ибо $1^{x}=1$ при любом действительном x.

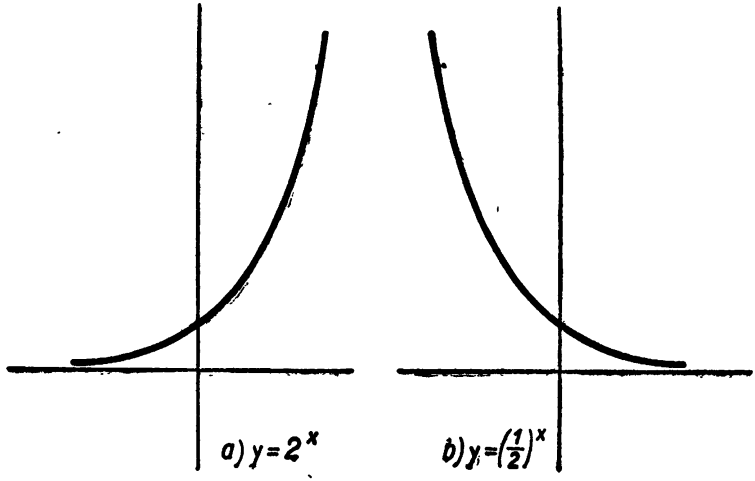
На основании доказанной теоремы и установленных свойств показательной функции можно утверждать, что при $a>1$ (или $a<1$) функция a^{x} в интервале $(-\infty, \infty)$ возрастает (убывает) от 0 до ∞ (от ∞ до 0).

Примечание I. *Если $a>0$ и $a\neq 1$, то равенство степеней числа a:*

$$a^{k}=a^{l} \qquad (1)$$

имеет место лишь при условии равенства показателей $k=l$.

В самом деле, при $a\neq 1$ показательная функция a^{x} — возрастает либо убывает и, следовательно, равенство ее значения невозможно при различных значениях аргумента.



Черт. 114.

Примечание II. Свойство степени

$$a^{x}a^{y}=a^{x+y}$$

можно прочитать так: *при перемножении значений показательной функции аргументы складываются.* Если ввести функциональное обозначение, положив $a^{x}=f(x)$, то это свойство запишется так:

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

Графики показательной функции при $a=2$ и при $a=\frac{1}{2}$ представлены на чертеже 114.

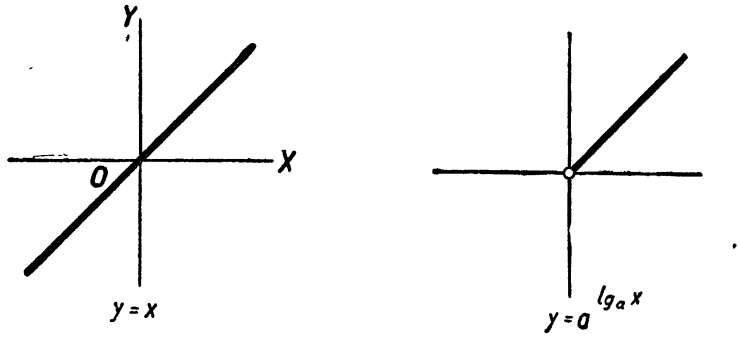
§ 89. Логарифмы и их свойства

Определение. *Логарифмом числа N при основании $a>0$ и $a\neq 1$ называется показатель степени, при возвышении в которую числа a получается число N.*

Для обозначения логарифма числа N при основании a употребляется символ $\lg_a N$. Таким образом, по определению логарифма имеем:

$$N=a^{\lg_a N}.$$

Теорема, доказанная в предыдущем параграфе, утверждает существование и единственность логарифма произвольного положительного числа N при положительном и отличном от 1 основании a.



Черт. 115.

Любая действительная степень положительного числа a есть положительное число, а потому ни при каком α степень a^{α} не может быть ни нулем, ни отрицательным числом. Следовательно, *нуль и отрицательные числа не имеют (действительных) логарифмов.*

Тождество.

$$x=a^{\lg_a x}$$

имеет место лишь при положительных значениях x, т. е. в интервале $(0, \infty)$. В самом деле, если $x\leqslant 0$, то $\lg_a x$ не имеет смысла, тогда как функция $y=x$ имеет смысл при всех значениях x. Различие между функциями $y=x$ и $y=a^{\lg_a x}$ графически показано на чертеже 115.

Из определения логарифма и свойств степеней вытекают следующие теоремы:

1° *Если два числа (при данном основании) имеют один и тот же логарифм, то эти числа равны.*

Доказательство. Пусть $\lg_a N_1=\lg_a N_2$, тогда:

$$N_1=a^{\lg_a N_1}=a^{\lg_a N_2}=N_2,$$

ч. т. д.

2° *Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей.*

Доказательство. Пусть $x>0$, $y>0$, имеем

$$x=a^{\lg_a x} \text{ и } y=a^{\lg_a y},$$

откуда $xy=a^{\lg_a x+\lg_a y}$. С другой стороны, по определению логарифма $xy=a^{\lg_a(xy)}$. Следовательно,

$$\lg_a(xy)=\lg_a x+\lg_a y, \tag{1}$$

ч. т. д.

Примечание. Предположение, что оба числа x и y положительные, существенно. Пусть, например, $x<0$, $y<0$, тогда $xy>0$ и $\lg(xy)$ имеет вполне определенное значение, но $\lg_a x$ и $\lg_a y$ не имеют действительных значений, а потому равенство (1) теряет смысл.

3° *Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.*

Доказательство. Имеем: $x=a^{\lg_a x}$, $y=a^{\lg_a y}$,

$$\frac{x}{y}=a^{\lg_a x-\lg_a y},$$

откуда

$$\lg_a\left(\frac{x}{y}\right)=\lg_a x-\lg_a y,$$

ч. т. д.

4° *Логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм данного числа.*

Доказательство. Пусть $N>0$ — данное число; имеем:

$$N=a^{\lg_a N} \text{ и } N^k=a^{k\lg_a N},$$

откуда

$$\lg_a N^k=k\lg_a N, \text{ ч. т. д.}$$

Пусть дано некоторое соотношение, например,

$$\frac{\sqrt[3]{d}\,b}{c}=\sqrt[3]{x^5y} \tag{2}$$

(где d, b, c, x и y — положительны). Если справедливо равенство (2), то равны логарифмы обеих частей:

$$\lg_a\left(\frac{\sqrt[3]{d}\,b}{c}\right)=\lg_a\left(\sqrt[3]{x^5y}\right).$$

Пользуясь теоремами 1°, 2°, 3°, получим:

$$\lg_a d^{\frac{1}{3}}+\lg_a b-\lg_a c=\frac{1}{3}\lg_a(x^5y)$$

или окончательно:

$$\frac{1}{3}\lg_a d+\lg_a b-\lg_a c=\frac{5}{3}\lg_a x+\frac{1}{3}\lg_a y. \tag{3}$$

Операция взятия логарифма от обеих частей равенства называется логарифмированием данного равенства.

Пусть дано соотношение между логарифмами некоторых чисел, например,

$$\lg_a x - \frac{1}{n}\lg_a y - k = 0, \tag{4}$$

или, что то же,

$$\lg_a x - \frac{1}{n}\lg_a y - \lg_a a^k = \lg_a 1.$$

На основании теорем 1°, 2°, 3° получим:

$$\lg_a \frac{x}{\sqrt[n]{y a^k}} = \lg_a 1.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{\sqrt[n]{y a^k}} = 1. \tag{5}$$

Переход к равенству (5), *не содержащему логарифмов, называется потенцированием данного равенства* (4).

Примеры

1. Известны логарифмы чисел при основании a, найти логарифмы чисел при другом основании, равном b.

Решение. По определению логарифма имеем

$$N = b^{\lg_b N}.$$

Логарифмируем это соотношение при основании a:

$$\lg_a N = \lg_b N \cdot \lg_a b,$$

откуда:

$$\lg_b N = \frac{\lg_a N}{\lg_a b} = \frac{1}{\lg_a b} \cdot \lg_a N. \tag{6}$$

Отсюда ***правило:*** *логарифм числа по „новому основанию" b равен логарифму того же числа по „старому основанию" a, умноженному на число* $\frac{1}{\lg_a b}$, *обратное логарифму нового основания по старому.* Множитель $\frac{1}{\lg_a b}$ называется модулем перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b.

2. Как изменяется логарифм числа при переходе от основания a к новому основанию равному a^k?

Решение. По формуле (6) имеем:

$$\lg_{a^k} N = \frac{\lg_a N}{\lg_a a^k} = \frac{\lg_a N}{k}. \tag{7}$$

Итак, при переходе к основанию a^k достаточно логарифмы чисел разделить на k. В частности:

$$\lg_{a^2} N=\frac{\lg_a N}{2},\ \lg_{\sqrt{a}} N=2\lg_a N,\ \lg_{\frac{1}{a}} N=-\lg_a N.$$

Формулу (7) можно получить непосредственно: если $N=a^{\lg_a N}$, то имеем $N=(a^k)^{\frac{\lg_a N}{k}}$, откуда следует (7).

3. Как связаны между собой логарифмы $\lg_a b$ и $\lg_b a$?

Решение. Полагая в равенстве (6) $N=a$, получим:

$$\lg_b a=\frac{1}{\lg_a b}. \tag{8}$$

4. Доказать, что отношение логарифмов двух данных чисел одинаково при любом основании.

Решение. В силу (6) имеем

$$\lg_b N=\frac{\lg_a N}{\lg_a b}\quad\text{и}\quad\lg_b M=\frac{\lg_a M}{\lg_a b},$$

откуда:

$$\frac{\lg_a N}{\lg_a M}=\frac{\lg_b N}{\lg_b M}.$$

5. Вычислить $\lg_{(a\cdot b\cdot c\ldots k)} x$, зная $\lg_a x, \lg_b x, \ldots, \lg_k x$.

Решение. Имеем:

$$\lg_{(a\cdot b\cdot c\ldots k)} x=\frac{1}{\lg_x (a\cdot b\cdot c\ldots k)}=\frac{1}{\lg_x a+\lg_x b+\ldots+\lg_x k},$$

откуда в силу (8):

$$\lg_{(a\cdot b\cdot c\ldots k)} x=\frac{1}{\frac{1}{\lg_a x}+\frac{1}{\lg_b x}+\ldots+\frac{1}{\lg_k x}}.$$

6. *Если некоторые положительные числа образуют геометрическую прогрессию, то их логарифмы образуют арифметическую прогрессию.*

В самом деле, логарифмируя члены геометрической прогрессии со знаменателем q:

$$k,\ kq,\ kq^2,\ldots,\ kq^n,\ldots,$$

получим арифметическую прогрессию с разностью $\lg_a q$:

$$\lg_a k;\ \lg_a k+\lg_a q;\ \lg_a k+2\lg_a q,\ldots,\ \lg_a k+n\lg_a q,\ldots$$

Пусть даны две прогрессии: геометрическая с положительными членами и с первым членом, равным 1, и арифметическая с первым членом, равным 0:

$$1,\ q,\ q^2,\ldots,q^n,\ldots$$
$$0,\ p,\ 2p,\ldots,\ np,\ldots$$

Покажем, что существует такое основание логарифмов a, при котором логарифмы членов геометрической прогрессии равны соответствующим членам арифметической прогресии: $\lg_a q^n=np$. В самом деле, $\lg_a q^n=n\lg_a q$, откуда $\lg_a q=p$ и $q=a^p$, следовательно,

$$a=q^{\frac{1}{p}}.$$

Возьмем арифметическую прогрессию с достаточно малой разностью, положив, например, $p=0{,}0001$. Соответствующую геометрическую прогрессию возьмем с знаменателем достаточно близким к 1, положив, например, $q=1{,}0001$. Вычисление членов $q^2, q^3, \ldots, q^n$ не представляет затруднений. Чтобы умножить какое-нибудь число k на $q=1{,}0001$, достаточно к этому числу прибавить его десятитысячную часть, т. е. к данному числу k прибавить число, которое получится, если перенести в дроби, изображающей k, запятую влево на 4 знака. Числа арифметической прогрессии являются логарифмами соответствующих членов геометрической прогрессии, взятыми при основании $a=q^{\frac{1}{p}}=(1{,}0001)^{10000}$. Описанным приемом можно составить таблицу

	$\lg_a N$	N	
0	0,0000	1,0000	$=1$
p	0,0001	1,0001	$=q$
$2p$	0,0002	1,0002	$\approx q^2$
$3p$	0,0003	1,0003	$\approx q^3$
. . . . .			

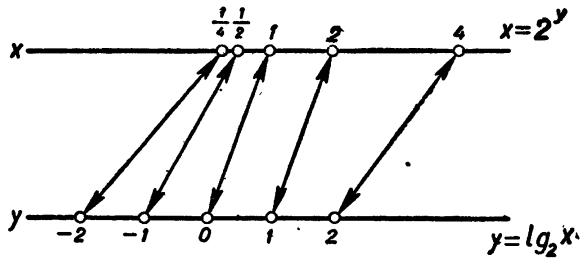
и т. д.

Этот прием был положен в основу составления первых логарифмических таблиц.

§ 90. Логарифмическая функция

Определение. *Функция, заданная формулой* $y=\lg_a x$ *(где* $a>0$ и $a\neq 1$*) называется логарифмической функцией.*

Каждому положительному числу x соответствует единственное действительное число y. Обратно, каждому действительному числу y соответствует единственное положительное число $x=a^y$. Таким образом между значениями x (где $0<x<\infty$) и y (где $-\infty<y<\infty$) устанавливается взаимно однозначное соответствие (черт. 116). Следовательно, функции $y=\lg_a x$ и $x=a^y$ взаимно обратные.

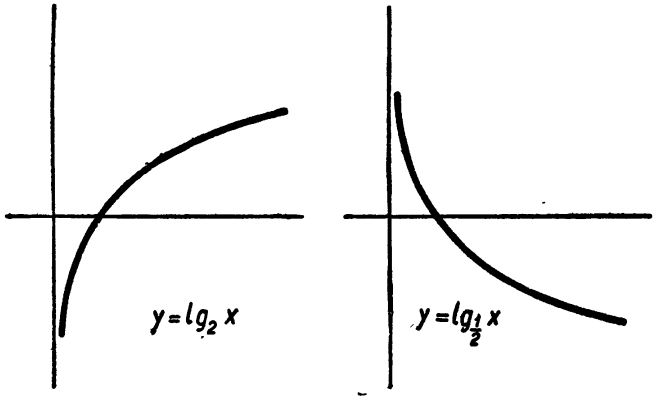


Черт. 116.

Так как при $a>1$ показательная функция a^y возрастает, то и обратная функция $y=\lg_a x$ возрастает. В интервале $0<x<\infty$ она возрастает от $-\infty$ до ∞. В самом деле, пусть $N>0$ — любое заданное число; во-первых, $\lg_a x<-N$, если $0<x<a^{-N}$, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\lg_a x=-\infty$; во-вторых, $\lg_a x>N$, если $x>a^N$, значит $\lim\limits_{x\to\infty}\lg_a y=\infty$ и, в-третьих, любое данное действительное значение $y=b$ функция имеет при $x=a^b$.

Аналогично можно показать, что при $0 < a < 1$ функция $y = \lg_a x$ в интервале $(0, \infty)$ убывает от ∞ до $-\infty$.

Для построения графика функции $y = \lg_a x$ достаточно построить график показательной функции $x = a^y$. На чертеже 117 изображены гра-



Черт. 117.

фики функций $y = \lg_2 x$ и $y = \lg_{\frac{1}{2}} x$. Это те же линии, которые изображены на чертеже 114, но расположенные на плоскости, как показано на чертеже 117.

Глава IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 91. Изображение действительных чисел точками окружности

Из геометрии известно, что процесс измерения углов (при выбранной единице измерения) ставит в соответствие всякому данному углу число — меру этого угла. В качестве единицы измерения может быть принят *какой угодно* угол. Так, например, в градусной мере за единицу измерения принимается угол, равный $\frac{1}{90}$ части прямого угла, а в радианной мере угол (радиан), равный центральному углу (в произвольном круге), опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу круга*.

В дальнейшем (если не будет делаться специальных оговорок) в качестве единицы измерения углов будет считаться *радиан*.

Как известно, между центральными углами в круге и дугами окружности (на которые эти углы опираются) может быть установлено взаимно однозначное соответствие, позволяющее принять в качестве единицы измерения дуг окружности ту дугу, которая соответствует

* В геометрии доказывается, что все круговые секторы, ограниченные дугой по длине, равной радиусу, подобны, а потому все рассматриваемые центральные углы равны (независимо от радиуса круга).

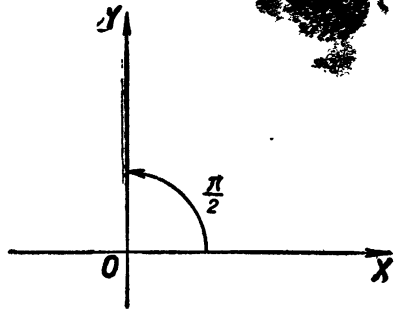
единичному углу. В соответствии с принятой единицей измерения углов для измерения дуг мы будем принимать дуговой радиан*.

Из геометрии известно, что понятие угла (дуги) может быть обобщено, именно:

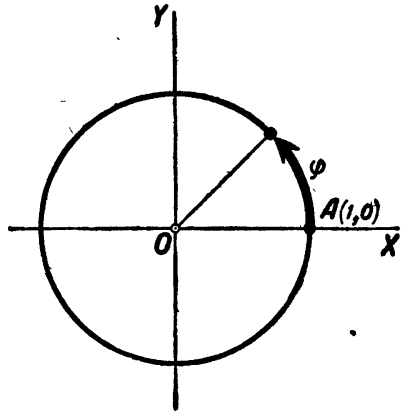
1° *Можно рассматривать углы (дуги) произвольной величины как меньшие, так и большие „полного оборота".*

2° *Можно рассматривать направленные углы (дуги) в соответствии с двумя возможными взаимно противоположными направлениями вращения на плоскости.*

Установим на данной плоскости систему декартовых прямоугольных



Черт. 118.



Черт. 119.

координат XOY. Из двух возможных направлений вращения в данной плоскости положительным будем считать то направление, при котором ось OX, будучи повернутой вокруг точки O на угол $+\frac{\pi}{2}$, совпадет с осью OY. На чертеже 118 положительное направление в координатной плоскости отмечено стрелкой, при указанном расположении осей это есть вращение „против движения часовой стрелки".

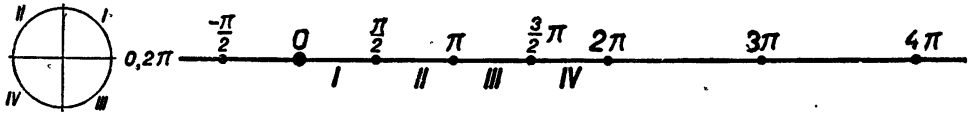
Плоскость с установленным на ней положительным направлением вращения называется ориентированной плоскостью.

Будем рассматривать всевозможные углы с вершиной в точке O, приняв положительную полуось абсцисс за начало отсчетов углов. Круг радиуса 1 с центром в начале координат будем называть единичным (или тригонометрическим) кругом. На окружности единичного круга точка $A(1,0)$ принимается за начало отсчета дуг, положительное направление на окружности определяется установленным положительным направлением вращения в плоскости XOY. Положительный центральный угол φ единичной окружности измеряется (в радианах) длиной дуги, на которую он опирается; отрицательный центральный угол измеряется отрицательным числом, противоположным длине соответствующей дуги (черт. 119).

* Выбор единицы измерения дуг и углов не имеет принципиального значения. Выбор радиана не диктуется необходимостью. Радиан оказывается лишь наиболее удобной единицей, так как в радианном измерении ряд формул, относящихся к тригонометрическим функциям, принимают наиболее простой вид.

Между углами (дугами единичной окружности) и действительными числами может быть установлено взаимно однозначное соответствие, при котором ставятся в соответствие друг другу углы (дуги) и измеряющие их числа. В целях краткости символических записей и словесных формулировок нередко угол (дуга) и соответствующее число — его мера — называют общим термином „угол" (дуга) и обозначают одной и той же буквой (разумеется, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям). Так, говоря кратко „дуга $\frac{\pi}{2}$", мы подразумеваем как саму дугу, так и ее радианную меру.

Всякое действительное число α может быть геометрически изображено при помощи точки единичной окружности следующим образом: отложим от начальной точки A дугу, измеряющуюся числом α, конец этой дуги рассматривается как изображение (на единичной окружности) числа α, геометрическим изображением числа 0 считается начальная точка $A(1,0)$. Таким образом, *всякому действительному числу может быть поставлена в соответствие единственная точка единичной окружности*. Это соответствие не является взаимно однозначным, так как каждая точка окружности служит изображением бесконечного множества действительных чисел, разность которых кратна 2π. Если $x_2 = x_1 + 2k\pi$, где k — произвольное целое число, то числа x_1 и x_2 изобразятся одной и той же точкой окружности. Так, например, точка $A(1,0)$ служит изображением чисел $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots, 2k\pi, \ldots$, а точка $A_1(-1,0)$ служит изображением чисел $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots (2k+1)\pi$ (где k — произвольное целое число).



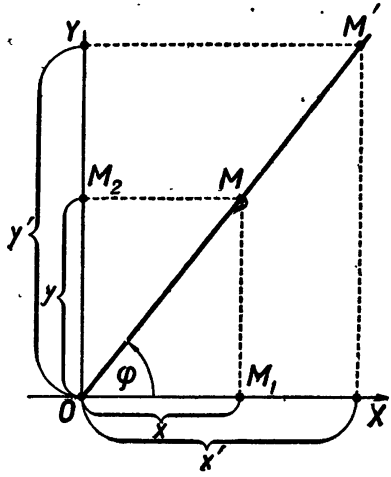
Черт. 120.

Сопоставим этот способ с обычным способом изображения действительных чисел точками прямой линии. Сегменту $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ на числовой прямой соответствует отрезок с концами в точках 0 и 2π; этому же сегменту соответствует полная единичная окружность, причем начальная и конечная точки сегмента $x = 0$ и $x = 2\pi$ изображаются одной и той же (начальной) точкой окружности. Сегменту $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$ соответствует полная окружность, „дважды покрытая" (при откладывании дуги длиной в 4π); на числовой прямой этому сегменту соответствует отрезок, ограниченный точками 0 и 4π. Четвертям I — IV тригонометрического круга на прямой соответствуют отрезки, занумерованные на чертеже 120 теми же цифрами. Соответствие между точками единичной окружности и числовой оси можно иллюстрировать при помощи следующей наглядной схемы. Представим себе числовую ось в виде тонкой нерастяжимой бесконечной нити. Совместив начальные точки O и A, будем наматывать нить на окружность, тогда точки числовой прямой совместятся с соответствующими точками единичной окружности.

В соответствии с делением единичного круга на четверти принято сегменты (числовые) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ называть первой, второй, третьей и четвертой четвертями.

§ 92. Тригонометрические функции произвольного угла

Пусть φ — данный угол на ориентированной плоскости. Установим на плоскости систему координат, приняв начальную сторону угла за ось абсцисс, а его вершину за начало координат. Рассмотрим произвольную точку M на конечной стороне угла φ. Проекции $x = OM_x$ и $y = OM_y$ радиуса-вектора OM на оси координат, т. е. координаты точки M, определяются не только углом φ, но и длиной ρ отрезка OM. Так, например, для точек M и M', изображенных на чертеже 121, имеем: $x < x'$, $y < y'$.



Черт. 121.

Теорема. *Отношения*

$$\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}$$

для данного угла φ определяются исключительно величиной угла φ.

Разъяснение. Третье отношение рассматривается при условии $x \neq 0$, т. е. когда конечная сторона φ не перпендикулярна к начальной. Значения $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pm\frac{3}{2}\pi$... не являются допустимыми при рассмотрении отношения $\frac{y}{x}$. Аналогично четвертое отношение рассматривается при условии $y \neq 0$. Значения $\varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$... следует исключить из числа допустимых значений φ.

Доказательство. Возьмем на конечной стороне угла φ две любые точки M и M', отличные от точки O (см. черт. 122 *а* и *b*). Опуская из точек M и M' проектирующие перпендикуляры на горизонтальную ось, мы получим подобные прямоугольные треугольники OMM_1 и $OM'M_1'$. Катеты треугольника OMM_1 суть абсолютные величины координат точки M, т. е. $|x|$ и $|y|$, гипотенуза равна длине ρ радиуса-вектора OM. Равенство

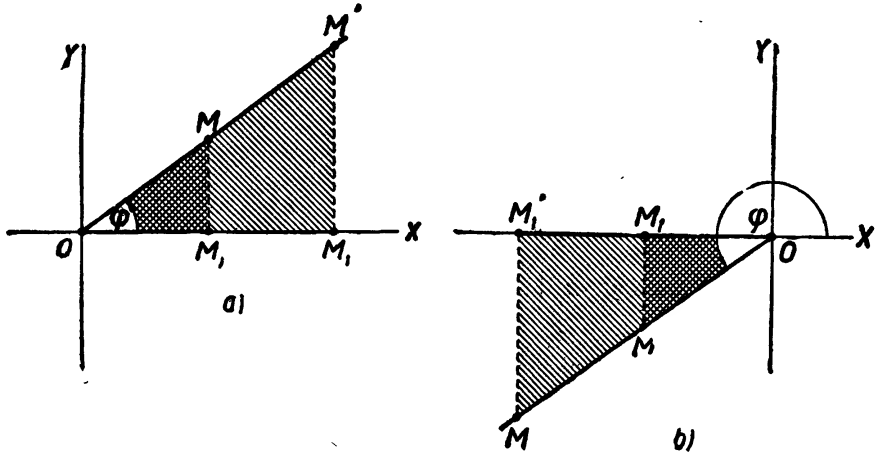
$$\frac{|x|}{\rho} = \frac{|x'|}{\rho'}$$

выражает равенство отношений сходственных катетов к гипотенузе. Абсциссы x и x' суть числа одного и того же знака, как проекции двух одинаково направленных отрезков OM и OM', расположенных на

одном и том же луче, поэтому отношения $\frac{x}{\rho}$ и $\frac{x'}{\rho'}$ совпадают не только по абсолютной величине, но и по знаку:

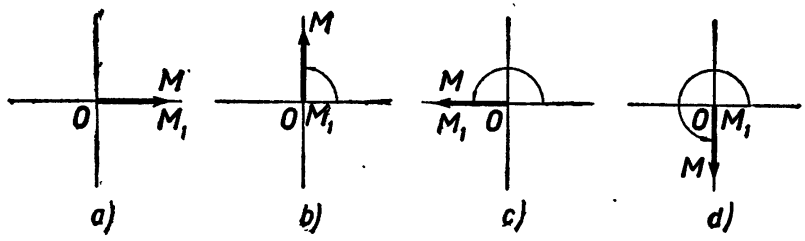
$$\frac{x}{\rho}=\frac{x'}{\rho'}.$$

Итак, отношение $\frac{x}{\rho}$ при данном угле φ одно и то же, независимо от длины радиуса-вектора OM. Аналогично доказывается теорема и для трех остальных отношений, ч. т. д.



Черт. 122.

Примечание. Треугольник OMM_1 вырождается в прямолинейный отрезок, если конечная сторона φ направлена вдоль одной из осей



Черт. 123.

(черт. 123). Так, например, в случае $\varphi=0$ точка M_1 совпадает с M, и мы получим:

$$x=OM_1=OM=\rho,\ y=M_1M=0.$$

Следовательно, $\frac{x}{\rho}=1$, $\frac{y}{\rho}=0$, $\frac{y}{x}=0$, а $\frac{x}{y}$ не существует,

Определения. 1° *Отношение* $\frac{x}{\rho}$ *проекции произвольного вектора* OM (*лежащего на конечной стороне угла* φ) *на направление начальной стороны к длине вектора* OM *называется косинусом угла* φ *и обозначается символом* $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}.$$

2° *Отношение* $\frac{y}{\rho}$ *проекции вектора* OM *на направление оси, образующей угол* $\frac{\pi}{2}$ *с начальной стороной, к длине вектора* OM *называется синусом угла* φ *и обозначается символом* $\sin\varphi$:

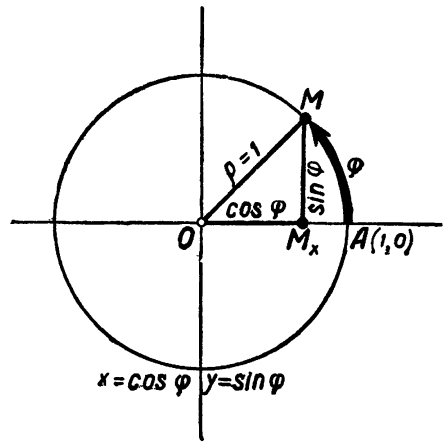
$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho}.$$

3° *Отношение* $\frac{y}{x}$ *проекции* OM *на ось, перпендикулярную к начальной стороне угла* φ, *к проекции* OM *на начальную сторону называется тангенсом угла* φ *и обозначается символом* $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

4° *Отношение* $\frac{x}{y}$ *называется котангенсом угла* φ *и обозначается символом* $\operatorname{ctg}\varphi$:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}.$$



Черт. 124.

Численное значение каждого из отношений

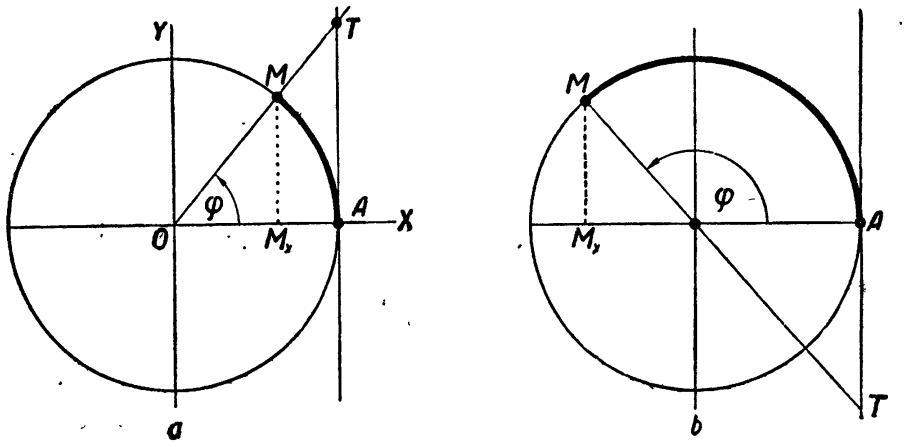
$$\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\varphi$$

определяется заданием угла φ, *а потому данные отношения суть функции угла* φ, *эти функции называются тригонометрическими функциями.*

Пользуясь независимостью значений тригонометрических функций от длины радиуса-вектора точки, взятой на конечной стороне угла, удобно для изучения свойств этих функций пользоваться „стандартным" тригонометрическим кругом. Именно данный угол φ будет рассматриваться как угол, образованный двумя радиусами единичного круга, принимая за начальную сторону угла φ радиус, соединяющий точку O с точкой $A(1,0)$ (черт. 124). Пусть M — соответствующая точка единичной окружности. Так как $\rho = OM = 1$, то имеем:

$$\cos\varphi = \frac{OM_x}{OM} = OM_x \text{ и } \sin\varphi = M_xM.$$

Рассмотрим ось, проходящую через начальную точку A и перпендикулярную начальному радиусу OA. Положительным направлением на этой оси будем считать направление „вверх", совпадающее с направлением параллельной ей оси ординат. Пусть T — точка пересечения

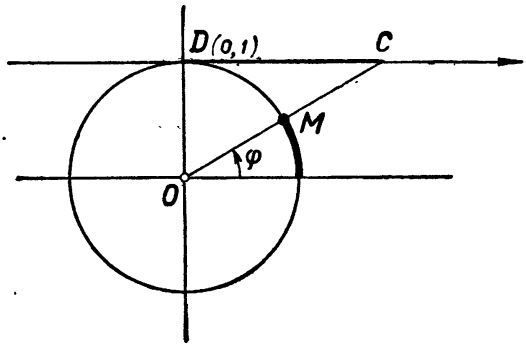


Черт. 125.

продолжения радиуса-вектора точки M с рассматриваемой осью. Согласно определению тангенса, имеем (черт. 125):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AT}{OA} = AT.$$

Равенство $\operatorname{tg}\varphi = AT$ имеет место для всех углов, кроме углов $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (где k — любое целое число), для которых конечная сторона перпендикулярна начальной (для этих углов $\operatorname{tg}\varphi$ не существует, не существует также и точка T).



Черт. 126.

Значения котангенса можно изображать отрезками горизонтальной оси, проходящей через точку $D(0,1)$, как показано на чертеже 126.

Итак, имеем:

$$\cos\varphi = OM_x, \quad \sin\varphi = M_xM,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = AT, \quad \operatorname{ctg}\varphi = DC.$$

Отрезки OM_x, M_xM, AT и DC называются линиями косинуса, синуса, тангенса и котангенса, так как их величины равны значениям соответствующих тригонометрических функций.

§ 93. Тригонометрические функции числового аргумента

Пусть φ — произвольное действительное число, данному числу φ соответствует измеряющийся им угол (дуга), а этому углу (дуге) соответствуют значения его тригонометрических функций *.

Рассмотрим для определенности какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, например, синус. Согласно сказанному, получается соответствие между числами, в силу которого произвольному действительному числу φ соответствует вполне определенное число y — значение синуса: $y = \sin\varphi$, следовательно, *мы имеем функцию числового аргумента*, эта функция, так же как и функция соответствующего угла (дуги), называется с и н у с о м.

Итак, каждая из тригонометрических функций может быть рассматриваема как функция числового аргумента.

Закон соответствия между значениями аргумента и тригонометрической функцией устанавливается не прямым указанием математических операций (формулой), которые надлежит выполнить над аргументом, а г е о м е т р и ч е с к и.

Однако чтобы иметь возможность говорить о функции числового аргумента, достаточно наличие закона соответствия, в силу которого каждому допустимому значению аргумента соответствует определенное значение функции, но не существенно, каким способом этот закон устанавливается **.

При рассмотрении тригонометрических функций как функций числового аргумента условились в качестве единицы измерения дуг и углов принимать р а д и а н. В силу этого соглашения символ $\sin 2$ следует толковать как синус угла (дуги), радианная мера которого выражается числом 2, символ $\cos 20$ означает косинус дуги, радианная мера которой выражается числом 20.

Взаимно однозначное соответствие, которое может быть установлено между числами, углами и дугами (произвольной величины), позволяет рассматривать тригонометрические функции как функции угла, либо как функции дуги, либо, наконец, как функции числа, при этом аргумент, по нашему усмотрению, толкуется как угол, как дуга или как число. Называя аргумент дугой (или углом), мы можем подразумевать под ним не самую дугу (или угол), а число, ее измеряющее. Сохра-

---

* При рассматривании тангенса (котангенса) значения $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (соответственного $k\pi$) следует исключить из множества допустимых значений φ.

** Средствами элементарной математики невозможно построить формулы, выражающие значения тригонометрических функций при помощи алгебраических действий над аргументом. Формулы, известные из высшей математики, выражающие значения тригонометрических функций непосредственно через значение аргумента

$\left(\text{например, } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \text{ и } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$, содержат, кроме алгебраических действий, операции предельного перехода (суммирование рядов, бесконечные произведения и пр.).

няя геометрическую терминологию, мы позволим себе вместо, например, такой фразы: „синус числа $\frac{\pi}{2}$“ — говорить: „синус дуги $\frac{\pi}{2}$“.

Пусть M — точка, изображающая данное число φ на единичной окружности (см. черт. 124); имеем:

$$\cos\varphi = x, \quad \sin\varphi = y.$$

Итак, *косинус и синус суть абсцисса и ордината точки единичной окружности, изображающей значение аргумента. Отношения координат точки M суть тангенс и котангенс:*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}.$$

Установим для каждой из тригонометрических функций область ее определения.

1° *Область определения функций* $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ *есть интервал* $-\infty < \varphi < \infty$. В самом деле, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, будучи абсциссой и ординатой точки единичной окружности, изображающей число φ, имеют определенные численные значения при произвольном действительном φ (черт. 124).

2° *Областью определения функции* $\operatorname{tg}\varphi$ *является множество всех действительных чисел, отличных от чисел вида* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(где k — произвольное целое число), т. е. область определения тангенса есть бесконечное множество интервалов:*

$$\ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \ldots$$

В самом деле, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, будучи отношением ординаты к абсциссе точки φ единичной окружности, теряет смысл лишь, если $x = 0$. Соответствующая точка единичной окружности должна лежать на оси ординат. Но на оси ординат существуют две геометрически различные точки $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi$. Эти точки являются конечными для дуг, измеряющихся числами $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, т. е. для дуг $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

3° *Областью определения функции* $\operatorname{ctg}\varphi$ *является множество всех действительных чисел, отличных от чисел вида* $k\pi$ *(где k — произвольное целое число), т. е. множество интервалов*

$$\ldots (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi), \ldots .$$

Доказательство аналогично изложенному в предыдущем пункте (для тангенса).

§ 94. Соотношения между тригонометрическими функциями

Теорема. *При всех значениях (допустимых) φ имеют место тождества:*

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{I}$$

Доказательство. Пусть φ — произвольное действительное число, а M — соответствующая точка единичной окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OMM_x (см. черт. 124) (где M_x — проекция точки M на ось абсцисс). Катетами треугольника OMM_x служат абсолютные величины координат точки M:

$$|x| = |\cos\varphi| \text{ и } |y| = |\sin\varphi|,$$

а гипотенуза равна 1. Справедливость первого тождества (I) вытекает из теоремы Пифагора:

$$|x|^2 + |y|^2 = |\cos\varphi|^2 + |\sin\varphi|^2 = 1. \tag{1}$$

Тождество остается в силе и в случае вырождения треугольника в отрезок; так, например, если точка M совпадает с одним из концов горизонтального диаметра, то $|\cos\varphi| = 1$, а $\sin\varphi = 0$ и соотношение (1) остается в силе.

Левая часть первого тождества (I) называется тригонометрической единицей.

Второе и третье тождества (I) выражают лишь иную запись определений тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

ч. т. д.

Из основных тождеств (I) можно в качестве следствия вывести сколько угодно других тригонометрических тождеств. Мы отметим наиболее часто встречающиеся следствия тождеств (I).

1° Из второго и третьего тождеств следует:

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1, \tag{2}$$

при всех значениях φ, для которых имеют смысл тангенс и котангенс.

2° Разделив первое тождество (I) почленно на $\sin^2\varphi$ (если $\sin\varphi \neq 0$), а затем на $\cos\varphi$ (если $\cos\varphi \neq 0$), получим:

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \text{ и } \operatorname{ctg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \tag{3}$$

или в другом обозначении:

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \sec^2\varphi \text{ и } \operatorname{ctg}^2\varphi + 1 = \operatorname{cosec}^2\varphi.$$

Из соотношений (I) можно алгебраически выразить значение произвольной тригонометрической функции через соответствующее значение любой другой функции.

Из первого тождества (I) можно выразить косинус через синус и, подставив остальные два соотношения, получить выражения для тангенса и котангенса через синус:

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}},\qquad (4)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$$

(знак во всех равенствах берется либо верхний, либо нижний).

Аналогично получаются выражения тригонометрических функций через косинус:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi},\qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Первое соотношение (3), являющееся следствием (I), позволяет выразить косинус через тангенс, из второго и третьего соотношений (I) найдем выражения синуса и котангенса через тангенс.

Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.\qquad (6)$$

Аналогично находятся выражения тригонометрических функций через котангенс:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}},\quad \sin\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi}.\qquad (7)$$

Равенства (4) — (7) дают выражения какой-либо одной из тригонометрических функций посредством алгебраических действий, совершаемых над значением произвольной другой функции.

Примеры выполнения тождественных тригонометрических преобразований.

1. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ дробь

$$\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$$

Решение. Введем в числителе квадрат тригонометрической единицы

$$\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}+2+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha+2+\operatorname{tg}^2\alpha.$$

2. Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$ дробь

$$P = \frac{1}{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}.$$

Р е ш е н и е. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha$:

$$P=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{a\operatorname{tg}^2\alpha+b\operatorname{tg}\alpha+c}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{a\operatorname{tg}^2\alpha+b\operatorname{tg}\alpha+c}.$$

3. Положим

$$x_1=\sin\varphi_1,\ x_2=\cos\varphi_1\sin\varphi_2,\ x_3=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$
$$x_n=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}.$$

Доказать, что при всех значениях $\varphi_1, \varphi_2\ldots\varphi_n$ имеет место тождество

$$x_1^2+x_2^2+\ldots x_{n-1}^2+x_n^2=1.$$

Р е ш е н и е.

$$x_{n-1}^2+x_n^2=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-2}\sin^2\varphi_{n-1}+$$
$$+\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-2}\cos^2\varphi_{n-1}=$$
$$=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-2}(\sin^2\varphi_{n-1}+\cos^2\varphi_{n-1})=$$
$$=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-2}.$$

Далее

$$x_{n-2}^2+x_{n-1}^2+x_n^2=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-3}\sin^2\varphi_{n-2}+$$
$$+\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-3}\cos^2\varphi_{n-2}=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\ldots\cos^2\varphi_{n-3}$$

и так далее, пока не получим

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=1.$$

4. Показать, что если имеет место равенство

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma),$$

то значение каждой части равно $|\sin\alpha|\cdot|\sin\beta|\cdot|\sin\gamma|$.

Р е ш е н и е. Умножим обе части на

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma),$$

получим

$$[(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)]^2=$$
$$=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma.$$

Выражение $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$ не отрицательно при любых значениях α, β и γ (так как $|\cos\varphi|\leqslant 1$); следовательно,

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=|\sin\alpha|\cdot|\sin\beta|\cdot|\sin\gamma|.$$

Если $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ положительны, например, в случае острых углов α, β и γ, то знак абсолютной величины излишен.

§ 95. Основные свойства тригонометрических функций

О г р а н и ч е н н о с т ь.

Теорема. *Функции* $\sin x$ и $\cos x$ *ограничены, функции* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *не ограничены (каждая из функций, рассматриваемая в области ее определения).*

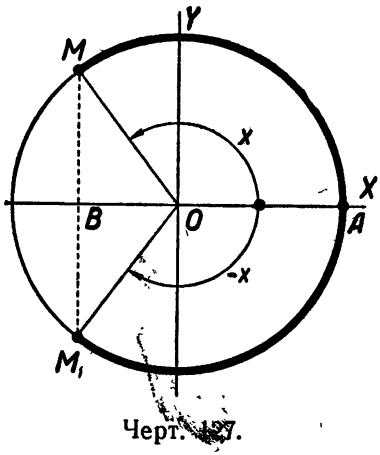
Доказательство. Функции $\sin x$ и $\cos x$, равные координатам точки единичного круга, изображающей значение аргумента x, не превосходят на абсолютной величине радиус круга:

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\cos x| \leqslant 1.$$

Следовательно, эти функции ограничены (см. черт. 124).

Примечание. Это следует также из основного соотношения $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

Функция $\operatorname{tg} x$ не ограничена. В самом деле, в качестве линии тангенса (см. черт. 125) может быть взят любой (как угодно большой по длине) отрезок.



Черт. 127.

Неограниченность котангенса устанавливается аналогично.

Четность и нечетность.

Теорема. *Функция* $\cos x$ *является четной, а функции* $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *являются нечетными.*

Доказательство. Точки единичной окружности M и M_1, изображающие числа x и $-x$ (черт. 127), расположены симметрично относительно оси OX. Следовательно, точки M и M_1 имеют одну и ту же абсциссу OB и равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку ординаты BM и BM_1, откуда:

$$\cos(-x) = \cos x \text{ и } \sin(-x) = -\sin x.$$

Для функции $\operatorname{tg} x$ имеем:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x;$$

аналогично:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Пример. Воспользовавшись равенством:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0 \\ -x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

найдем выражения для синуса и косинуса от $|x|$; имеем:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x & (\text{если } x \geqslant 0) = \sin x \\ \sin(-x) & (\text{если } x < 0) = -\sin x \end{cases}$$

$$\cos|x| = \begin{cases} \cos x & (\text{если } x \geqslant 0) \\ \cos(-x) & (\text{если } x < 0) \end{cases} = \cos x.$$

Периодичность

Теорема. 1° *Тригонометрические функции являются периодическими с общим периодом* 2π.

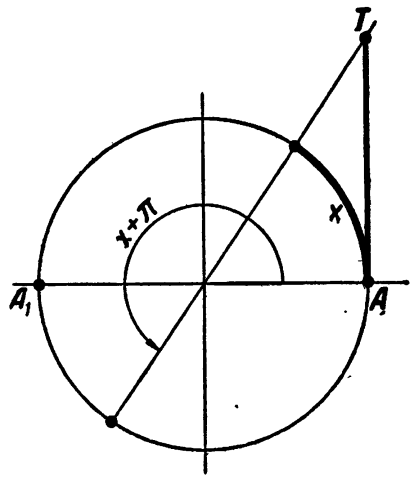
2° *Наименьший положительный период функций* $\sin x$ *и* $\cos x$ *есть* 2π.

3° *Наименьший положительный период функций* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *есть* π.

Доказательство. 1° Два числа x и $x+2k\pi$ (где k — произвольное целое число) изображаются одной и той же точкой единичной окружности, а потому имеют одни и те же координаты, следовательно, значения тригонометрических функций от аргументов x и $x+2k\pi$ равны:

$$f(x)=f(x\pm 2\pi)=f(x\pm 4\pi)=\ldots= \\ =f(x+2k\pi), \qquad (1)$$

где через $f(x)$ обозначена любая тригонометрическая функция.



Черт. 128.

2° Покажем, что $l=2\pi$ есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее при всех значениях x условию

$$\cos(x+l)=\cos x. \qquad (2)$$

Пользуясь произвольностью значения x, положим в тождестве (2) $x=0$, тогда получим: $\cos l=\cos 0=1$.

Следовательно, конец дуги l должен совпадать с начальной точкой A. Наименьшее положительное значение l есть $l=2\pi$.

Доказательство теоремы для синуса проводится аналогично; достаточно в условии

$$\sin(x+l)=\sin x$$

положить $x=\frac{\pi}{2}$ и показать, что наименьшее положительное значение l, при котором

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

есть $l=2\pi$.

3° Ограничимся рассмотрением тангенса. Соотношение

$$\operatorname{tg}(x+l)=\operatorname{tg} x \qquad (3)$$

имеет место при любом допустимом значении x и при $l=\pi$. В самом деле, концы дуг x и $x+\pi$ диаметрально противоположны (черт. 128). Следовательно, дуги x и $x+\pi$ имеют одну и ту же линию тангенса AT, а потому

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

$l=\pi$ есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее соотношению (3) при произвольном (допустимом) x. Положив в (3)

$x=0$, получим $\operatorname{tg} l=0$, т. е. отрезок AT должен выродиться в точку, а потому точка T должна совпасть с точкой A. Для конца дуги l возможны два положения: $A(1,0)$ и $A_1(-1,0)$. Наименьшее положительное значение дуги, при котором $AT=0$ есть $l=\pi$, ч. т. д.

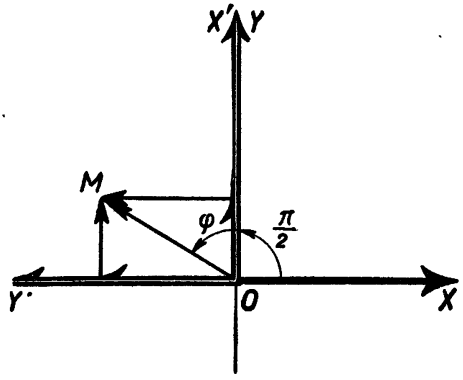
§ 96. Формулы приведения

Нижеследующая теорема устанавливает формулы преобразования значений тригонометрических функций при прибавлении к аргументу одной четвертой части общего периода.

Теорема. *При произвольном (допустимом) значении аргумента φ имеют место тождества:*

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)&=-\sin\varphi,\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi\\ \operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)&=-\operatorname{ctg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\varphi\end{aligned}\right\}\qquad\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$$

Доказательство. Пусть XOY — данная система прямоугольных координат на плоскости. Повернем оси координат вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ (черт. 129), тогда прямая OX займет положение OX', совпадающее с прямой OY, а прямая OY займет положение OY', совпадающее с прямой OX, при этом направления осей OX' и OY совпадают, а направления осей OY' и OX взаимно противоположны. Установим соотношения между координатами одной и той же (произвольной) точки M плоскости в системах XOY и $X'OY'$. Пусть x и y — координаты точки M в системе XOY, а x' и y' — координаты той же точки в системе $X'OY'$. Проектируя вектор OM на ось OX', получим:



Черт. 129.

$$x'=\text{пр}_{x'}OM=\text{пр}_yOM=y.$$

При проектировании OM на ось OY' следует принять во внимание, что проекции одного и того же вектора на оси OX и OY' суть числа, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку (так как направления осей противоположны); имеем:

$$y'=\text{пр}_{y'}OM=-\text{пр}_xOM=-x.$$

Итак,

$$x'=y\ \text{и}\ y'=-x. \qquad (1)$$

Примем ось OX' за начальную сторону данного угла φ. Конечная сторона этого угла будет образовывать с осями OX и OX' (соответ-

ственно) угла $\varphi+\frac{\pi}{2}$ и φ. Координаты соответствующей точки единичной окружности суть:

$$x=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\quad y=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

в системе XOY

и $$x'=\cos\varphi \text{ и } y'=\sin\varphi$$

в системе $X'OY'$.

В силу соотношений (1) получим:

$$\cos\varphi=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \sin\varphi=-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство теоремы для тангенса и котангенса сводится к формальным преобразованиям; так, например, имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

На основании формул $\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$ и свойства четности и нечетности тригонометрических функций выводится ряд тождеств, известных из школьного курса тригонометрии под названием „формул приведения".

Заменяя в формулах $\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$ аргумент φ на $-\varphi$, получим следующую серию формул:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi\\&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{ctg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi\end{aligned}\right\}\quad\left[\frac{\pi}{2}-\varphi\right]$$

Так, например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(-\varphi)\right]=-\sin(-\varphi)=\sin\varphi.$$

Применяя последовательно два раза формулу $\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$, получим формулы „прибавления полупериода" к аргументу:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi,\ \cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi\\&\operatorname{tg}(\varphi+\pi)=\operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}(\varphi+\pi)=\operatorname{ctg}\varphi\end{aligned}\right\}\quad[\varphi+\pi]$$

Так, например:

$$\sin\varphi=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right]=-\sin(\pi+\varphi),$$

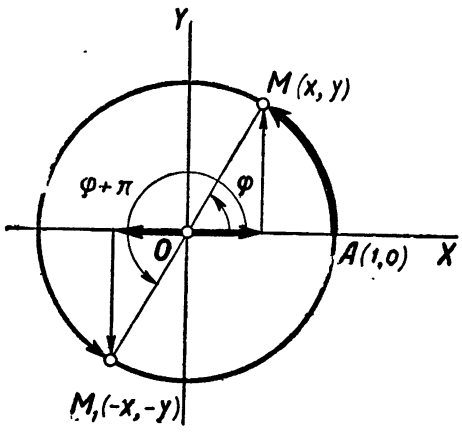
Формулы $[\varphi+\pi]$ имеют следующее геометрическое толкование: точки единичной окружности, изображающие значения φ и $\varphi+\pi$, симметричны относительно центра круга, а потому их координаты суть противоположные числа, а отношения координат равны (черт 130).

Последовательное прибавление $\frac{\pi}{2}$ к аргументу тригонометрических функций в сочетании с применением свойств четности и нечетности дает дальнейшие серии формул приведения, выражающих значения тригонометрических функций от аргументов

$$\pi-\varphi,\quad \frac{3\pi}{2}+\varphi,$$

$$\frac{3\pi}{2}-\varphi,\quad 2\pi+\varphi,\quad 2\pi-\varphi$$

через их значения от аргумента φ. Эти формулы приводятся в школьном учебнике тригонометрии.



Черт. 130.

Формулы приведения носят общий характер; они справедливы, каково бы ни было значение аргумента φ.

В самом деле, свойство четности и нечетности и формулы $\left[\frac{\pi}{2}+\varphi\right]$ были установлены для произвольного значения φ, прочие же тождества могут быть получены из них путем формальных преобразований.

Формулы приведения позволяют свести исследование тригонометрических функций, рассматриваемых в различных промежутках, к их исследованию в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, в силу периодичности тригонометрических функций достаточно провести их исследование в промежутке от 0 до 2π (либо в каком-либо другом промежутке, охватывающем общий период, например, от $-\pi$ до π). Пусть, например, тригонометрические функции исследуются при значениях аргумента x во второй четверти: $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$; достаточно, представив аргумент в виде $x=\frac{\pi}{2}+\varphi$ $\left(\text{где } 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, заменить $\left(\text{по формулам } \left[\frac{\pi}{2}+\varphi\right]\right)$ функции от аргумента x функциями от аргумента φ, содержащегося в первой четверти.

Формулы приведения показывают, что в практических вычислениях достаточно знать значения тригонометрических функций в пределах от 0° до 45° (мы пишем градусы, так как таблицы, применяемые на практике, обычно даются в градусной мере). В самом деле, пусть β — данный угол (достаточно предположить, что $0\leqslant\beta<360^\circ$). Рассмотрим два острые угла, которые образует конечная сторона угла β с горизонтальным и с вертикальным диаметрами тригонометрического

круга. Обозначим через α наименьший из этих углов (или один из них, если оба они равны 45°), тогда имеем: $0 \leqslant \alpha \leqslant 45°$. При помощи соответствующих формул приведения можно выразить тригонометрические функции от угла β через тригонометрические функции от угла α.

§ 97. Промежутки монотонности тригонометрических функций

Теорема. *В первой четверти каждая из тригонометрических функций монотонна, именно:*

1° *на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *функция* $\sin x$ *возрастает, а функция* $\cos x$ *убывает;*

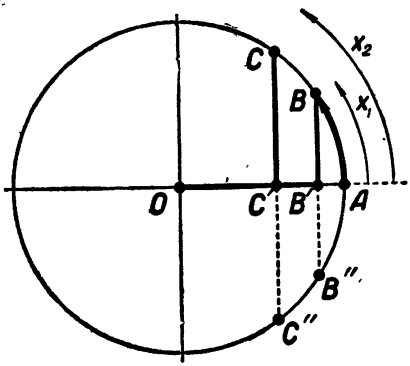
2° *в интервале* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *функция* $\operatorname{tg} x$ *возрастает, а функция* $\operatorname{ctg} x$ *убывает.*

Доказательство. 1° Требуется доказать, что при $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства: $\cos x_1 > \cos x_2$ и $\sin x_1 < \sin x_2$.

Изобразим значения аргумента x_1 и x_2 в виде дуг тригонометрического круга: $x_1 = \overset{\smile}{AB}$ и $x_2 = \overset{\smile}{AC}$ (черт. 131). Из геометрии известно, что:

1) большей дуге соответствует бо́льшая стягивающая хорда (дуги предполагаются меньшими полуокружности).

2) хорда, стягивающая бо́льшую дугу удалена от центра круга на меньшее расстояние.



Черт. 131.

Имеем:

$$\overset{\smile}{BB''} = 2\overset{\smile}{AB} = 2x_1 < 2x_2 = 2\overset{\smile}{AC} = \overset{\smile}{CC''},$$

следовательно, $OB' > OC'$, или $\cos x_1 > \cos x_2$, и $B''B < C''C$, или $2B'B < 2C'C$, откуда $\sin x_1 < \sin x_2$.

Примечание. Возрастание синуса (в I четверти) можно вывести из убывания косинуса (и обратно), достаточно принять во внимание, что $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. В первой четверти $\cos x > 0$; следовательно, подкоренное выражение (а потому и $\sin x$) возрастает.

2° Требуется доказать, что при $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства:

$$\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} x_1 > \operatorname{ctg} x_2.$$

В самом деле, в промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$ числитель дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$ возрастает, а знаменатель убывает: при $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ имеем

$0 < \sin x_1 < \sin x_2$ и $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$. Следовательно, большему значению аргумента соответствует большее значение тангенса:

$$0 < \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Котангенс обратен по величине тангенсу: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Большему значению аргумента соответствует большее значение тангенса и меньшее значение котангенса:

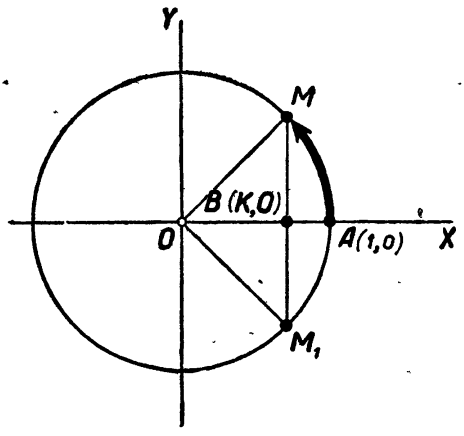
$$\operatorname{ctg} x_1 > \operatorname{ctg} x_2, \text{ ч. т. д.}$$

Теорема. 1° *Каково бы ни было неотрицательное действительное число k не большее 1, в первой четверти существует единственное значение аргумента x, косинус (синус) которого равен k.*

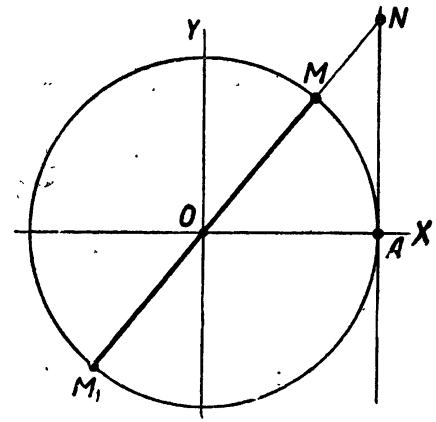
2° *Каково бы ни было неотрицательное число N, в первой четверти существует единственное значение аргумента x, тангенс (котангенс) которого равен N.*

Доказательство. 1° Требуется доказать, что каково бы ни было число k, взятое при условии $0 \leqslant k \leqslant 1$, в сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственное значение x, при котором $\cos x = k$ (соответственно $\sin x = k$).

Приведем доказательство для функции $\cos x$. Рассмотрим на горизонтальной оси точку $B(k, 0)$ с абсциссой, равной k. При $0 \leqslant k < 1$ параллель оси ординат, проходящая через точку B, пересечет единич-



Черт. 132.



Черт. 133.

ную окружность в двух точках M и M_1 симметричных относительно горизонтальной оси. Одна из этих точек лежит (точка M, черт. 132) в первой четверти. Дуга $x = \overset{\smile}{AM}$ удовлетворяет условию

$$\cos x = k.$$

Если $k = 1$, то точка B совпадает с точкой A, соответствующая параллель касается единичной окружности в точке $A(1,0)$; в этом случае имеем $x = 0$ и $\cos 0 = 1$.

Для функции $\sin x$ можно привести аналогичное рассуждение, взяв точку $B(0, k)$ на оси ординат и видоизменив соответствующим образом построение. Можно воспользоваться формулами приведения: достаточно принять во внимание, что $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, что аргумент $x' = \frac{\pi}{2} - x$ также заключен в первой четверти и что для функции $\cos x'$ теорема доказана.

2° Требуется доказать, что каково бы ни было неотрицательное число $N \geqslant 0$, в первой четверти существует единственное значение x, при котором $\operatorname{tg} x = N$ (соответственно $\operatorname{ctg} x = N$).

Рассмотрим для определенности функцию $\operatorname{tg} x$. На касательной к единичной окружности в точке A отложим (вверх) от начальной точки A отрезок AN, равный по длине числу N (при $N = 0$ точки N и A совпадают). Прямая, соединяющая точку N с центром тригонометрического круга, пересечет единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M и M_1, одна из которых (черт. 133 точка M) содержится в первой четверти. Дуга $x = \overset{\smile}{AM}$ удовлетворяет условию $\operatorname{tg} x = N$.

Для функции $\operatorname{ctg} x$ справедливость теоремы вытекает из доказанного. В самом деле, при $N > 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = N$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{N}$. Но это последнее в первой четверти имеет единственное решение. При $N = 0$ имеем $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, ч. т. д.

Следствие.

При любом заданном числе $N > 0$ существует такое число ξ, меньшее $\frac{\pi}{2}$, что неравенство $\operatorname{tg} x > N$ выполняется для всех значений x, больших ξ, но меньших $\frac{\pi}{2}$. В самом деле по доказанному существует число $\xi < \frac{\pi}{2}$ такое, что $\operatorname{tg} \xi = N$. В силу возрастания (в первой четверти) тангенса неравенство $\operatorname{tg} x > N$ выполняется при всех значениях x, удовлетворяющих условию $\xi < x < \frac{\pi}{2}$. Это свойство тангенса символически записывается так:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty \quad \left(\text{при} \quad x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Подобным же образом устанавливается аналогичное свойство котангенса:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{ctg} x = \infty \quad (\text{при } x > 0).$$

Доказанные свойства тригонометрических функций обычно формулируют следующим образом:

1° *На сегменте $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0.*

2° *На сегменте* $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *функция* $\sin x$ *возрастает от* 0 *до* 1.

3° *В промежутке* $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ *функция* $\operatorname{tg} x$ *возрастает от* 0 *до* ∞.

4° *В промежутке* $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *функция* $\operatorname{ctg} x$ *убывает от* ∞ *до* 0.

Воспользовавшись формулами приведения, можно установить промежутки монотонности для каждой из тригонометрических функций.

Теорема. 1° *Функция* $\cos x$ *на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant \pi$ *(I и II четверти) убывает от* 1 *до* -1, *а на сегменте* $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ *(III и IV четверти) возрастает от* -1 *до* 1.

2° *Функция* $\sin x$ *на сегменте* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *(I отрицательная и I четверти) возрастает от* -1 до 1, *а на сегменте* $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ *(II и III четверти) убывает от* 1 *до* -1.

3° *Функция* $\operatorname{tg} x$ *в интервале* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ *возрастает от* $-\infty$ *до* ∞.

4° *Функция* $\operatorname{ctg} x$ *в интервале* $0 < x < \pi$ *убывает от* ∞ *до* $-\infty$.

Доказательство. 1° Исследуем функцию $\cos x$ во второй четверти. Если $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$, то точка единичной окружности, изображающая значение аргумента x, имеет отрицательную абсциссу, а потому $\cos x < 0$. Убывание косинуса можно установить геометрически, но проще воспользоваться формулами приведения: полагая $x = \frac{\pi}{2} + \varphi$, имеем:

$$\cos x = -\sin\varphi.$$

Так как на сегменте $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, соответствующем сегменту $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ функция $\sin\varphi$ возрастает от 0 до 1, то функция $\cos x$ убывает от 0 до -1.

Итак, на сегменте $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0, а на сегменте $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ убывает от 0 до -1, следовательно, на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ косинус убывает от 1 до -1. Исследование косинуса на сегменте $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ (III и IV четверти) не представляет затруднений, достаточно положить $x = \pi + \varphi$ и принять во внимание, что $\cos x = -\cos\varphi$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и что на сегменте $[0, \pi]$ функция $\cos\varphi$ убывает от 1 до -1.

2° Функция $\sin x$ является нечетной:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

и на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ возрастает от 0 до 1, следозательно, на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$ синус возрастает * от -1 до 0, а на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ возрастает от -1 до 1. Воспользовавшись формулой

$$\sin x = \sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$$

$\left(\text{где } x = \varphi + \pi \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что функция $\sin x$ на сегменте $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ убывает от 1 до -1, ч. т. д.

Предложения 3° и 4° доказываются аналогично. Предоставляем читателю провести соответствующие рассуждения.

Дальнейшее исследование промежутков монотонности тригонометрических функций излишне, так как каждая из них рассмотрена в пределах полного ее периода. Так, функция $\cos x$ убывает от 1 до -1 на каждом из сегментов

$$\ldots[-2\pi, -\pi], [0, \pi], [2\pi, 3\pi], [4\pi, 5\pi]\ldots$$

В самом деле, будучи убывающей от 1 до -1 на сегменте $[0, \pi]$, косинус обладает тем же свойством на любом из сегментов $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, где k — произвольное целое число. Аналогично устанавливается следующее: функция $\cos x$ возрастает от 1 до -1 на каждом из сегментов $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$; функция $\sin x$ возрастает от -1 до 1 на каждом из сегментов $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ и убывает от 1 до -1 на каждом из сегментов $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Функция $\operatorname{tg} x$ имеет период, равный π, и возрастает от $-\infty$ до ∞ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, охватывающем полный период. Следовательно, функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до ∞ в каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Аналогично, функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от ∞ до $-\infty$ в каждом из интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$.

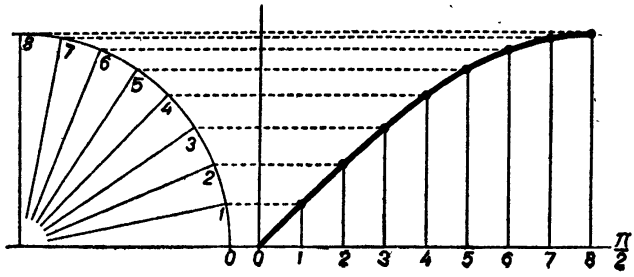
§ 98. Графики тригонометрических функций

Для построения графиков тригонометрических функций достаточно построить соответствующие линии при значениях аргумента, содержащихся в первой четверти. Для построения графиков в прочих четвертях достаточно воспользоваться установленными свойствами тригонометрических функций (периодичность, четность и нечетность, формулы приведения).

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. На этом сегменте функция $y = \sin x$ возрастает от 0 до 1. Для уточнения

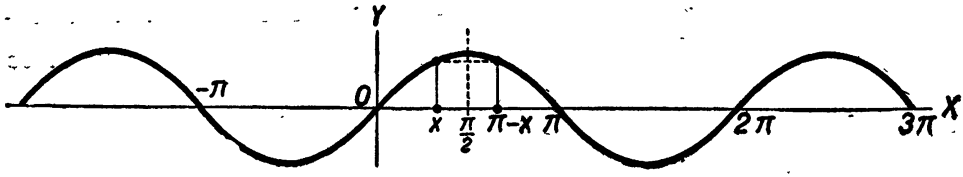
* См. аналогичные рассуждения для степенной функции x^{2k+1}, стр. 258.

формы линии можно воспользоваться известными значениями синуса. Для более точного построения графика следует воспользоваться таблицей значений тригонометрических функций. Можно выполнить геометрически построение линии с любой степенью точности. Это построение пояснено на чертеже 134. Первая четверть единичной окружности и отрезок $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ разделены на одинаковое количество равных частей (на чертеже на 8 частей). Перпендикуляры, опущенные из кон-



Черт. 134.

цов точек деления дуги на ось ординат (т. е. значения синуса), снесены в виде ординат, восстановленных из соответствующих точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Концы этих ординат принадлежат графику. Во второй четверти синус убывает от 1 до 0. Из соотношения $\sin x = \sin(\pi - x)$ (черт. 135) ясно, что линия симметрична относительно параллели оси ординат, проходящей через точки $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Из свойства нечетности синуса $\sin(-x) = -\sin x$ следует, что линия симметрична относительно начала координат.



Черт. 135.

Построив график на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, мы сможем построить его на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, а значит и на всем сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Но промежуток $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ охватывает полный период синуса, а потому для построения всей линии достаточно на каждом из сегментов

$$\pi \leqslant x \leqslant 3\pi,\ 3\pi \leqslant x \leqslant 5\pi,\ \ldots,\ -3\pi \leqslant x \leqslant -\pi,\ \ldots$$

повторить график, уже построенный на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Таким образом, получается волнообразная линия, называющаяся синусоидой.

График косинуса можно построить непосредственно, однако проще воспользоваться формулами приведения $\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$. Имеем:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

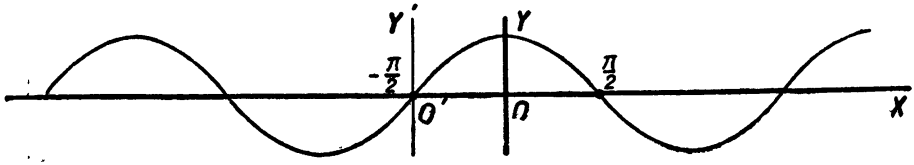
Следовательно, графиком функций

$$y=\cos x \text{ и } y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

является одна и та же линия. Именно график функции

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

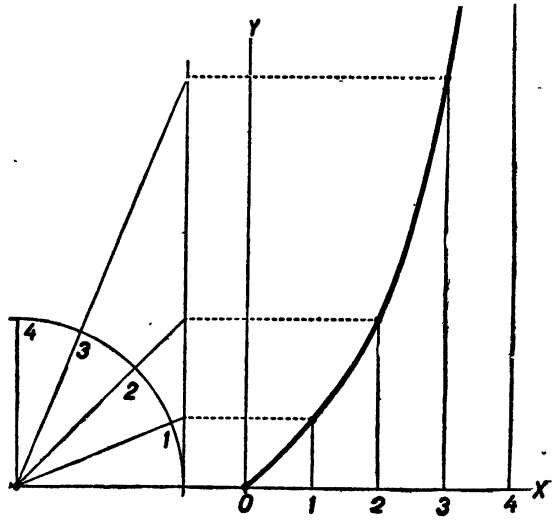
есть синусоида, сдвинутая влево в направлении оси абсциссы на рас-



Черт. 136.

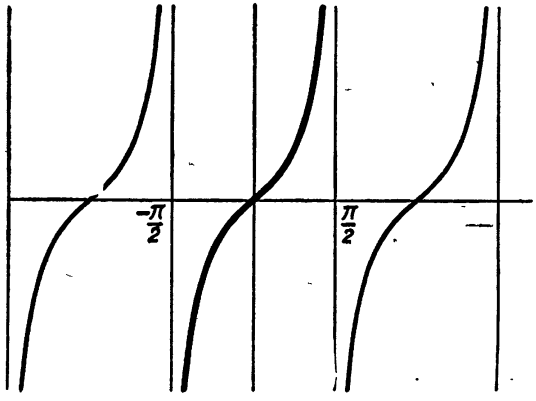
стояние $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, положим $x=x'-\frac{\pi}{2}$ и построим синусоиду $y=\sin x'$. Перейти к искомому графику можно, если уменьшить абсциссу x' на величину $\frac{\pi}{2}$, а соответствующую ординату оставить без изменения (черт. 136).

Рассмотрим функцию $x=\operatorname{tg} x$. В промежутке $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ тангенс возрастает от 0 до ∞, следовательно, график имеет вертикальную асимптоту $x=\frac{\pi}{2}$. Для уточнения графика следует воспользоваться известными значениями тангенса, а также тригонометрическими таблицами. Построение с какой угодно степенью точности можно выполнить геометрически следующим образом. Достаточно разделить первую четверть тригонометрического круга и промежуток $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ на некоторое (оди-

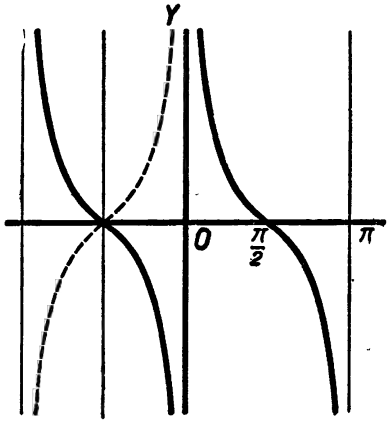


Черт. 137.

наковое) количество разных частей и перенести линии тангенса в качестве ординат, восстановленных в соответствующих точках, как показано на чертеже 137. Из свойства нечетности и тангенса следует симметричность линии относительно начала координат; таким образом, для построения графика в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ достаточно график, построенный в промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, продолжить симметрично



Черт. 138.



Черт. 139.

относительно начала координат. Построив график в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и повторив его периодически (с периодом π) в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, получим график тангенса (тангенсоиду), изображенный на чертеже 138.

Соотношение $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ показывает, что для построения графика котангенса достаточно сместить тангенсоиду влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$ и отобразить ее симметрично (как в зеркале) относительно оси абсцисс (черт. 139).

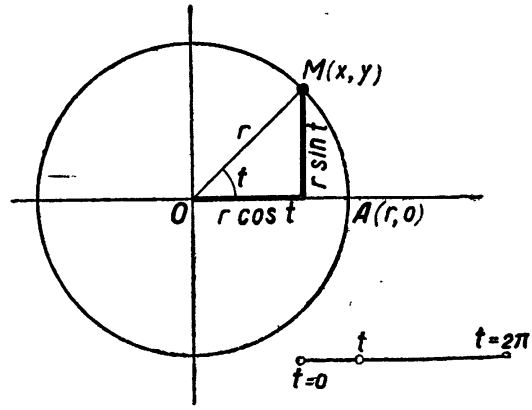
§ 99. Параметрические уравнения окружности, гармонические колебания

Рассмотрим окружность радиуса r с центром в начале координат. Каждой точке $M(x, y)$ окружности можно поставить во взаимно однозначное соответствие число t, заключенное в промежутке $0 \leqslant t < 2\pi$, равное радианной мере угла, образованного радиусом OM с осью абсцисс (черт. 140).

Декартозы координаты точки $M(x, y)$ окружности (в силу определения тригонометрических функций) равны:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t. \tag{1}$$

Задание системы функции (1) можно рассматривать как способ задания окружности, в котором координаты произвольной ее точки представлены в виде функции одного аргумента t, называемого параметром. Обычно рассматривают систему (1) на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. При этом взаимная однозначность соответствия между значениями параметра t и точками окружности нарушается, именно точки интервала $0 < t < 2\pi$ и точки окружности, отличные от точки $A(r, 0)$, находятся во взаимно однозначном соответствии, а концам сегмента $[0, 2\pi]$, т. е. точкам $t = 0$ и $t = 2\pi$, соответствует одна и та же точка A окружности. Будем изображать значения параметра t точками прямой линии (см. черт. 140), тогда параметрическому заданию окружности можно дать следующее толкование. Система функций (1) реализует отображение (т. е. соответствие), в котором точки прямолинейного отрезка $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ отображаются на точки окружности. При этом двум различным точкам отрезка соответствуют две различные точки окружности и исключение представляют лишь концы отрезка, образом которых служит одна и та же точка A. Описанное отображение хорошо согласуется со следующим наглядным представлением. Представим себе отрезок $[0, 2\pi]$ сделанным из гибкого растяжимого материала. В результате растяжения (при $r < 1$ фактически будем иметь сжатие) данного отрезка в r раз получится отрезок, имеющий длину $2\pi r$. Соединив концы этого отрезка, мы получим замкнутую линию, которой можно придать форму рассматриваемой окружности.



Черт. 140.

Если систему функций (1) рассматривать в интервале $-\infty < t < \infty$, т. е. при всех действительных значениях параметра, то в качестве образа на плоскости получим ту же окружность, но взаимная однозначность отображения будет нарушена, именно двум значениям аргумента, отличающимся на число, кратное периоду t_1 и $t_2 = t_1 + 2k\pi$ (где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), соответствует одна и та же точка окружности. В силу сказанного каждый из числовых сегментов

$$[-4\pi, -2\pi], \quad [-2\pi, 0], \quad [0, 2\pi], \quad [2\pi, 4\pi], \quad \ldots$$

отображается на полную окружность. Допуская фигуральное выражение, можно сказать, что в качестве образа получается одна и та же окружность в бесконечном множестве экземпляров.

Параметрическое представление окружности имеет следующее кинематическое толкование. Рассмотрим отрезок OM длины r, вращающейся вокруг конца O с угловой скоростью 1 радиан в единицу времени. Предположим, что в начальном положении точка M совпадает

с точкой $A(r, 0)$ оси абсцисс. По истечении времени t вращающийся отрезок составит угол в t радианов с осью абсцисс, а координата его конца M выразится формулами (1). Таким образом, формулы (1) определяют положение точки M, движущейся по окружности в любой момент времени t. По прошествии времени $t=2\pi$ точка M вернется в начальное положение и будет в дальнейшем продолжать периодическое движение по окружности. Если угловая скорость вращения отрезка OM равна ω, то за промежуток времени t угол поворота будет равен ωt. Предположим, что в начальном положении отрезок OM образует угол α с осью абсцисс, тогда в момент времени t угол вектора $\boldsymbol{OM}$ с осью абсцисс будет равен $\omega t+\alpha$, а координаты точки M выразятся формулами:

$$x=r\cos(\omega t+\alpha),\quad y=r\sin(\omega t+\alpha). \tag{2}$$

Полная окружность будет описана за время $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Из физики известно, что гармоническим колебанием называется движение проекции на некоторую данную прямую l точки, равномерно движущейся по окружности. Не умаляя общности, в качестве прямой l можно взять ось абсцисс (изменение направления оси l вызовет лишь изменение величины начального угла α), тогда закон движения точки M_x выразится рассматриваемой в отдельности первой функцией системы (1):

$$x=r\cos(\omega t+\alpha).$$

Точка M_x совершает периодическое $\left(\text{с периодом } T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ колебательное движение на отрезке $[-r, r]$. Наибольшее отклонение вправо (влево) от точки O достигается в моменты времени t, при которых $\cos(\omega t+\alpha)=1$ (соответственно -1), откуда $\omega t+\alpha=2k\pi$ (или $(2k+1)\pi$) и $t=\frac{2k\pi-\alpha}{\omega}$ $\left(\text{соответственно } \frac{(2k+1)\pi-\alpha}{\omega}\right)$.

§ 100. Теорема о проекции вектора на ось

Теорема. *Проекция вектора AB на ось l равна произведению длины вектора на косинус угла, образованного AB с осью l:*

$$\text{пр}_l AB=|AB|\cos\varphi.$$

Доказательство. При параллельном переносе вектора его проекция не меняется, поэтому можно выполнить предварительно параллельный перенос вектора и поместить его начало A в какой-либо точке оси l (черт. 141). Пусть φ — угол, образованный AB с осью l

$$\varphi=\angle(\widehat{l, AB}),$$

а ρ — длина вектора AB. По определению косинуса, имеем:

$$\cos\varphi=\frac{AB'}{\rho}=\frac{\text{пр}_l AB}{\rho},$$

откуда:

$$\text{пр}_l AB=\rho\cos\varphi, \text{ ч. т. д.}$$

Доказанная теорема может быть обобщена. Рассмотрим две оси l и m, образующие между собой угол φ (черт. 142):

$$\varphi = \angle(\widehat{l, m}).$$

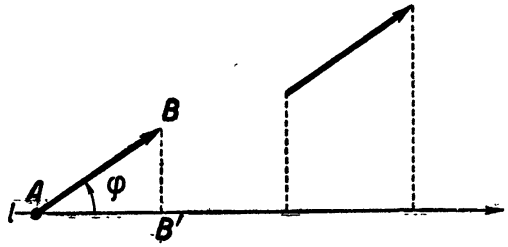
Теорема. *Проекция вектора AB, расположенного на некоторой оси m, на другую ось l равна произведению величины* этого вектора на косинус угла, образованного осью m с осью l.*

Доказательство. Если направление вектора AB совпадает с направлением оси m, то его величина равна положительному числу (его длине), и мы имеем $|AB| = \rho$. Вектор AB образует угол φ с осью l, а потому

$$\text{пр}_l AB = \rho \cos\varphi$$

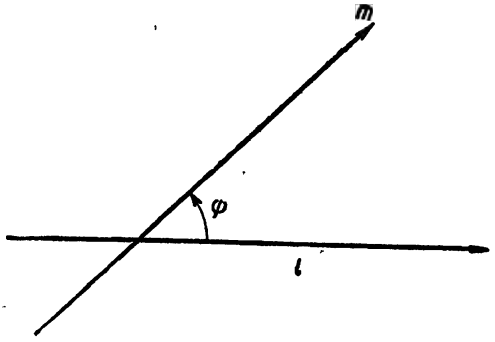
или

$$\text{пр}_l AB = |AB| \cos\varphi.$$

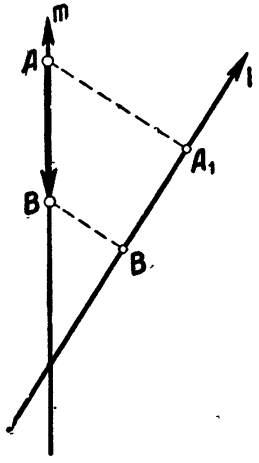


Черт. 141.

Рассмотрим проекцию на ось l вектора AB, направление которого противоположно направлению оси m. Величина вектора AB характеризуется отрицательным числом $-|AB| = -\rho$. В рассматриваемом случае направление вектора BA совпадает с направлением оси m (черт. 143).



Черт. 142.



Черт. 143.

Проекции векторов AB и BA на ось l равны по абсолютной величине и противоположны по знаку; имеем:

$$\text{пр}_l AB = -\text{пр}_l BA = -(\rho\cos\varphi) = (-\rho)\cos\varphi = AB\cos\varphi.$$

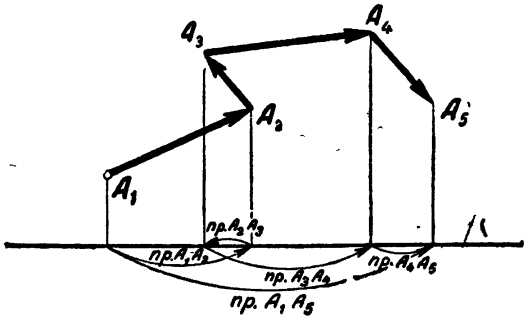
Таким образом, теорема справедлива при любом расположении точек A и B на оси m, ч. т. д.

* Величиной вектора AB на данной оси мы называем число AB, равное длине вектора, если направление вектора совпадает с направлением оси, противоположное длине вектора, если его направление противоположно направлению оси. Величина нуль-вектора считается равной нулю.

§ 101. Теоремы сложения

Теоремы сложения устанавливают формулы, при помощи которых значения тригонометрических функций от суммы алгебраически выражаются через значения тригонометрических функций от слагаемых*.

При доказательстве теорем сложения мы будем пользоваться общей теоремой о проекциях, известной из геометрии. Ниже приводится формулировка этой теоремы.



Черт. 144.

Пусть $A_1A_2, \ldots, A_n$ — произвольная ломаная на плоскости (черт. 144). Звенья ломаной будем рассматривать как векторы A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, направления которых определяются порядком задания вершин. Вектор A_1A_n, соединяющий начало первого звена с концом последнего, называется замыкающей данной ломаной.

Теорема. *Сумма проекций на некоторую ось звеньев ломаной равна проекции на ту же ось замыкающей:*

$$\text{пр } A_1A_n = \text{пр } A_1A_2 + \text{пр } A_2A_3 + \ldots + \text{пр } A_{n-1}A_n$$

(доказательство см. в учебнике С. П. Виноградова „Краткий курс высшей математики", § 11).

Теорема. *При произвольных действительных значениях* α *и* β *имеют место равенства:*

$$1^\circ \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha+\beta})$$

$$2^\circ \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \qquad (S_{\alpha+\beta})$$

если существуют $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\alpha$ *и* $\operatorname{tg}\beta$, то

$$3^\circ \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (T_{\alpha+\beta})$$

Доказательство. 1° Для доказательства формулы $(C_{\alpha+\beta})$ отложим от конечной стороны угла α угол β (черт. 145). Пусть OS есть положение конечной стороны угла β. На луче OS возьмем точку M на расстоянии, равном 1 от точки O: $|OM| = 1$. Косинус угла $\alpha+\beta$ есть проекция радиуса-вектора OM на начальную сторону OX угла α:

$$\text{пр}_x\, OM = \cos(\alpha+\beta).$$

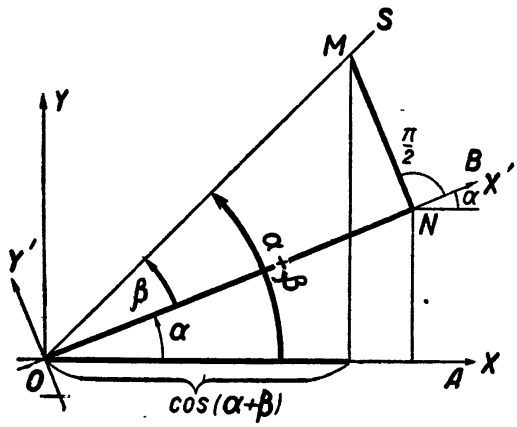
---

* Не следует думать, что существование таких формул является очевидным. Например, логарифм от суммы $\lg(x+y)$ невозможно выразить алгебраически через $\lg x$ и $\lg y$. В этом смысле и следует понимать часто употребляющуюся крайне неудачную фразу „сумму нельзя логарифмировать".

Для угла β роль горизонтальной оси играет ось OX', совпадающая с конечной стороной угла α. Система осей $X'OY'$ может быть получена из системы XOY поворотом на угол α.

Пусть ON есть проекция радиуса-вектора OM на ось OX'. Радиус-вектор OM есть замыкающая ломаной ONM. Спроектируем эту ломаную на ось OX. По теореме о проекции ломаной, имеем:

$$\cos(\alpha+\beta) = \text{пр}_x ON + \text{пр}_x NM. \qquad (1)$$



Черт. 145.

Отрезок ON лежит на оси OX', и его величина равна

$$ON = \text{пр}_{x'} OM = \cos\beta,$$

поэтому

$$\text{пр}_x ON = ON\cos(\widehat{XOX'}) = \cos\beta\cos\alpha.$$

Отрезок NM параллелен оси OY', величина его равна $\text{пр}_{y'} OM = \sin\beta$. Направление оси OY' образует с осью OX угол, равный $\alpha+\frac{\pi}{2}$:

$$\angle(\widehat{XOY'}) = \angle(\widehat{XOX'}) + \angle(\widehat{X'OY'}) = \alpha+\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_x NM = NM\cos(XOY') = \sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha\sin\beta.$$

Подставляя в равенство (1) полученные выражения для $\text{пр}_x ON$ и $\text{пр}_x NM$, получим формулу $(C_{\alpha+\beta})$, ч. т. д.

2° Для доказательства формулы $(S_{\alpha+\beta})$ заменим в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ аргумент α на $\frac{\pi}{2}-\alpha$ и β на $-\beta$:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta).$$

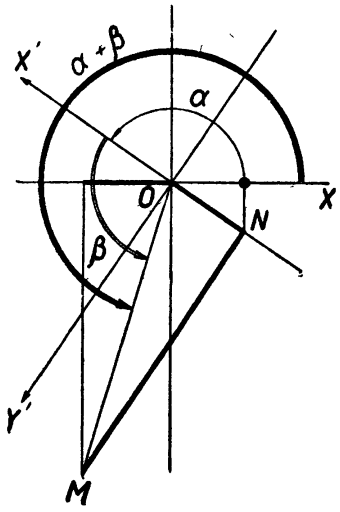
Воспользовавшись формулами приведения $\left[\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$ и $[-\alpha]$, получим формулу $(S_{\alpha+\beta})$.

3° Воспользовавшись формулами $(S_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha+\beta})$ для всех значений α и β, для которых существует $\text{tg}(\alpha+\beta)$, получим:

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Если существуют $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, то $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$. Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу $(T_{\alpha+\beta})$, ч. т. д.

Приведенное доказательство теорем сложения основывается на свойствах тригонометрических функций и на теоремах о проекциях, носящих общий характер (т. е. справедливых при произвольных α и β), поэтому и само доказательство справедливо для произвольных значений α и β (следует принять во внимание лишь оговорку в пункте 3°). Для упражнения предлагаем читателю воспроизвести доказательство формулы $(C_{\alpha+\beta})$, пользуясь чертежом 146.



Черт. 146.

Заменив в формулах сложения аргумент β на $-\beta$ и воспользовавшись свойством четности и нечетности тригонометрических функций, получим известные из школьного курса тригонометрии формулы преобразования тригонометрических функций от разности. Так, например, заменив в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ аргумент β на $-\beta$ получим:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{\alpha-\beta}).$$

Последовательным применением формул $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ можно выразить тригонометрические функции от суммы любого числа дуг (углов) через тригонометрические функции данных дуг. Так, например:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

§ 102. Следствия теорем сложения

1. Тригонометрические функции кратных дуг

Если в формулах сложения $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$ и $(T_{\alpha+\beta})$ положить $\alpha=\beta$, то получатся формулы, выражающие значения тригонометрических функций от двойного аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α. Имеем:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (S_{2\alpha})$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

Формулы для тригонометрических функций от 3α, 4α и т. д. могут быть получены последовательным применением теорем сложения. Так, например:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Общие формулы для $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ можно получить, применив формулу Моавра (см. § 54, стр. 155).

II. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Применив формулы сложения, получим:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (SC)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (CC)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (SS)$$

Эти формулы позволяют заменить вычисление произведения синусов и косинусов вычислением суммы этих функций (но от других аргументов).

Положив в формулах (SC), (CC) и (SS) $\alpha=\beta$, получим выражения для произведения $\sin\alpha\cos\alpha$ и для квадратов косинуса и синуса через тригонометрические функции двойного аргумента:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Последовательным применением выведенных формул всегда можно выразить степени и произведения степеней синуса и косинуса от некоторого аргумента через сумму синусов и косинусов кратных дуг.

Формула Моавра позволяет найти общее выражение степеней синуса и косинуса через функции кратных дуг.

Положим:

$$u = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad v = \cos\alpha - i\sin\alpha;$$

тогда имеем:

$$\cos\alpha = \frac{u+v}{2}; \quad \sin\alpha = \frac{u-v}{2i},$$

$$uv = 1, \quad u^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha, \quad v^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha,$$

откуда:

$$\cos n\alpha = \frac{1}{2}(u^n + v^n), \quad \sin n\alpha = \frac{1}{2i}(u^n - v^n).$$

Следовательно:

$$\cos^n\alpha = \left(\frac{u+v}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}(u^n + C_n^1 u^{n-1}v + C_n^2 u^{n-2}v^2 + \\ + \ldots + C_n^2 u^2 v^{n-2} + C_n^1 u v^{n-1} + v^n) =$$

$$= \frac{1}{2^n}[(u^n + v^n) + C_n^1 uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + C_n^2 (uv)^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots] =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}[\cos n\alpha + C_n^1 \cos(n-2)\alpha + C_n^2 \cos^{n-4}\alpha + \ldots].$$

Аналогично можно получить выражение для $\sin^n\alpha$.

III. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Пусть φ и ψ — два данные числа; введем вспомогательные аргументы α и β, связанные с φ и ψ уравнениями $\alpha + \beta = \varphi$, $\alpha - \beta = \psi$, откуда:

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Подставив в формулы (*SC*), (*CC*) и (*SS*) эти значения α и β, получим:

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}; \qquad (S+S)$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}; \qquad (C+C)$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}. \qquad (C-C)$$

Заменив в $(S+S)$ ψ на $-\psi$, получим:

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}. \qquad (S-S)$$

Несложным преобразованием получим:

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi}; \qquad (T+T)$$

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\cos\psi}. \qquad (T-T)$$

Положив $\varphi = 0$ в формулах $(C+C)$ и $(C-C)$, получим следующие часто применяемые формулы:

$$1 + \cos\psi = 2\cos^2\frac{\psi}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \cos\psi = 2\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Выведенные формулы преобразования тригонометрических сумм в произведения нередко называются формулами приведения к логарифмическому виду. При вычислениях всегда удобно вместо умножения пользоваться сложением, поэтому при вычислениях с натуральными таблицами значений тригонометрических функций удобно преобразовывать произведения в суммы. Если при вычислениях пользуются логарифмами, то удобно суммы заменять произведениями.

IV. Формулы деления аргумента

Заменив в формуле $(C_{2\alpha})$ α на $\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha;$$

к этому соотношению присоединим тождество:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Решая относительно $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

а также

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad \left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Знаки перед радикалами должны выбираться в соответствии с тем, в какой четверти расположен аргумент $\frac{\alpha}{2}$.

Построение формул, выражающих тригонометрические функции от аргумента $\frac{\alpha}{n}$ (где n — натуральное число), через функции аргумента α встречает трудности алгебраического характера, связанные с необходимостью решать уравнения высших степеней. Если в формуле $(C_{n\alpha})$ (стр. 155) заменить $n\alpha$ на α, а α на $\frac{\alpha}{n}$, и выразить степени синуса через косинус, то для нахождения неизвестного $x = \cos\frac{\alpha}{n}$ получится уравнение:

$$\cos\alpha = x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4} - \dots .$$

Так, например, при $n = 3$ получим кубическое уравнение:

$$\cos\alpha = 4x^3 - 3x \quad \text{или} \quad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos\alpha}{4} = 0.$$

Это уравнение можно решить в радикалах, однако здесь мы встречаемся с неприводимым случаем. Формула Кардано дает:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{8} + \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - 1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha}{8} - \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - 1}{64}}}.$$

Так как $\cos^2\alpha - 1 \leqslant 0$, то в общем случае под знаками кубических радикалов получаются комплексные числа, и выразить x в дей-

ствительной форме при помощи радикалов не представляется возможным.

Заметим, что последовательным применением формул $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ и $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ можно выразить посредством радикалов тригонометрические функции аргумента $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ и вообще $\frac{\alpha}{2^n}$ через функции аргумента α.

Так, например: $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

и т. д.

Теоремы сложения и вытекающие из них следствия имеют большое применение при выполнении разнообразных тождественных преобразований.

Примеры:

1. Выразить через функции кратных дуг $\sin^2\alpha\cos^4\alpha$.

Решение.

$$\sin^2\alpha\cos^4\alpha=(\sin\alpha\cos\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=\frac{1}{8}\sin^2 2\alpha(1+\cos 2\alpha)=\frac{1}{8}\sin^2 2\alpha+\frac{1}{8}\sin 2\alpha(\sin 2\alpha\cos 2\alpha)=$$
$$=\frac{1}{16}(1-\cos 4\alpha)+\frac{1}{16}\sin 2\alpha\sin 4\alpha=$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos 4\alpha+\frac{1}{32}(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)=$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$$

2. Показать, что

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha)=0.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое в сумму по формуле (*SC*):

$$\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta).$$

Написав аналогичные равенства для остальных трех слагаемых и сложив их почленно, получим нуль в правой части.

3. Преобразовать в произведение

$$S=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Р е ш е н и е.

а) по формуле $(T+T)$:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

b)

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left[\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)-\sin\left((\alpha+\beta)+\gamma\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left[-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\right],$$

c)

$$S=\operatorname{tg}\gamma-\frac{\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left[\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\right]=$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Итак,

$$S=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

В частности, для углов треугольника получим:

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

4. Доказать тождество:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \qquad (1)$$

(допустимыми считаются значения x, при которых правая часть имеет смысл).

Р е ш е н и е. По формуле $(S_{2\alpha})$ имеем:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x;$$

$$2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{2};$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad;$$

$$2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}=\sin\frac{x}{2^{n-1}}.$$

Перемножая эти равенства почленно и сокращая на

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\ldots\sin\frac{x}{2^{n-1}},$$

получим:

$$2^n\sin\frac{x}{2^n}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\sin x,$$

откуда и следует тождество (1).

5. Найти сумму

$$S=\frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)},$$

. . . . . .

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\sin\beta}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}.$$

Складывая почленно, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}\alpha=S\sin\beta,$$

откуда

$$S=\frac{\sin n\beta}{\sin\beta\cos\alpha\cos(\alpha+n\beta)}.$$

6. Вычислить сумму косинусов и синусов дуг, образующих арифметическую прогрессию.

Решение. Рассмотрим сумму:

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos(a+nh)=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kh);$$

имеем:

$$\sin\frac{h}{2}\cos a=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)\right],$$

$$\sin\frac{h}{2}\cos(a+h)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\frac{3}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\right],$$

. . . . . .

$$\sin\frac{h}{2}\cos(a+nh)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\right].$$

Складывая почленно и деля на $\sin\frac{h}{2}$, получим:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kh)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)\right].$$

Откуда окончательно

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kh)=\frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Если в этой формуле заменить a на $\frac{\pi}{2}-a$ и h на $-h$, то получим:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kh)=\frac{\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

7. Дано

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\},\qquad(2)$$

где a, b, c, A, B и C заключены между 0 и π, доказать, что:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.\qquad(3)$$

Доказательство. В условиях (2) каждая последующая строчка получается из предыдущей круговой перестановкой букв a, b, c и A, B, C. Рассмотрим отдельно 1-ю строчку. Имеем:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

откуда:

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{\cos^2 a+\cos^2 b\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sin c}=$$

$$=\sin a\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c}=K\sin a.$$

Множитель K (в окончательном выражении) при $\sin a$ есть симметрическая функция аргументов a, b и c, не меняющаяся при их перестановке, поэтому все отношения (3) имеют одно и то же значение, равное этому множителю.

Примечание. Перед радикалом берем знак $+$, так как аргументы в пределах от 0 до π имеют положительные синусы.

§ 103. Рационализирующие подстановки

Рассмотрим функцию $R(\cos x, \sin x)$, рациональную относительно $\cos x$ и $\sin x$ *. Заметим, что рассмотрение функций $P(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, рациональных относительно $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, не представляет специального интереса, так как $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ рационально выражаются через синус и косинус.

---

* Это значит, что положив $\cos x=u$, $\sin x=v$, получим рациональную функцию $R(u, v)$ двух аргументов u и v.

Примерами функций рациональных относительно синуса и косинуса могут служить:

$$\sin x \cos x,\ \frac{1}{\sin x - \cos x},\ \frac{\sin x}{2\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x}.$$

Теорема. *Всякая функция* $R(\cos x, \sin x)$, *рациональная относительно* $\cos x$ *и* $\sin x$ *может быть представлена в виде рациональной функции от* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что функции $\cos x$ и $\sin x$ рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. В самом деле, выполняя следующие элементарные преобразования, получим:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Обозначив $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, представим $\cos x$ и $\sin x$ в виде рациональных функций аргумента t:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ и } \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Заменяя в данном выражении $R(\cos x, \sin x)$ функции $\cos x$ и $\sin x$ их выражениями через t, получим рациональную функцию от аргумента t, ч. т. д.

Примечание. При элементарной трактовке вопроса, исходя из непосредственного определения тригонометрических функций, значения аргумента $x = (2k+1)\pi$, при которых $t = \operatorname{tg}\frac{2}{x}$ теряет смысл, следует исключить из множества допустимых значений. Принцип продолжения функции по непрерывности (см. § 83, стр. 252) освобождает от необходимости исключить значения $x = (2k+1)\pi$.
В самом деле, имеем:

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t}{1 + t^2} = 0$$

и

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = -1,$$

а потому, в точках $(2k+1)\pi$ значения рассматриваемых выражений следует считать равными 0 и -1 (соответственно); те же значения в данных точках имеют функции $\sin x$ и $\cos x$.

Система функций

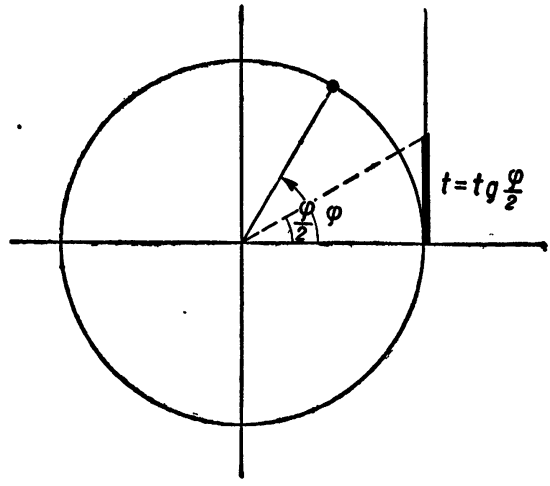
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{R}$$

рассматриваемых в интервале $-\infty < t < \infty$, дает параметрическое представление окружности. В самом деле, всякому данному действительному значению t соответствует единственное значение φ, взятое в интервале $-\pi < \varphi < \pi$ и удовлетворяющее условию $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$. Соответствующая точка

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi$$

расположена на единичной окружности. Обратно, всякой точке единичной окружности, отличной от точки $(-1,0)$, соответствует единственное значение φ в интервале $(-\pi, \pi)$ и значению φ единственное значение $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Точка окружности $(-1,0)$ получается в результате перехода к пределу:

$$-1 = \lim_{|t| \to \infty} x \quad \text{и} \quad 0 = \lim_{|t| \to \infty} y.$$



Черт. 147.

При рассмотренном параметрическом представлении окружности координаты ее точек выражаются в виде рациональных функций от аргумента (параметра) t. Геометрический смысл t пояснен на чертеже 147.

Параметрические уравнения (R) позволяют находить на единичной окружности „рациональные точки", т. е. точки с рациональными координатами. Покажем, что рациональные значения t и рациональные точки окружности, за исключением точки $(-1,0)$, находятся во взаимно однозначном соответствии. В самом деле, всякому рациональному значению t формулы (R) ставят в соответствие пару рациональных чисел x и y, т. е. рациональную точку окружности. Обратно,

если (x, y) есть рациональная точка единичной окружности и $x \neq -1$, то соответствующее значение параметра t есть рациональное число, так как из формул (R) следует:

$$t = \frac{y}{1+x}.$$

Полученному результату можно дать другое геометрическое толкование. Примем за единицу гипотенузу c прямоугольного треугольника, тогда формулы

$$a = \frac{2t}{1+t^2}, \quad b = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

дает возможность отыскать в общем виде прямоугольные треугольники, катеты которых соизмеримы с гипотенузой. Итак, мы получаем следующие общие выражения катетов „рациональных" прямоугольных треугольников:

$$a = \frac{2t}{1+t^2}\, c, \quad b = \frac{1-t^2}{1+t^2}\, c,$$

откуда

$$a : b : c = 2t \cdot (1-t^2) : (1+t^2).$$

Придавая t всевозможные рациональные значения, будем получать всевозможные рациональные треугольники. Так, при $t = 2$ можно положить $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ (мы получим по формуле $b < 0$, однако знак не существенен, поскольку речь идет о длинах сторон треугольника), при $t = 3$ получим $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, при $t = 0$ и $t = 1$ треугольник вырождается в отрезок.

Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ называется универсальной, так как она всякое выражение $R(\cos x, \sin x)$ преобразует в рациональное выражение от аргумента t.

Отметим следующие частные случаи, в которых рационализация может быть достигнута при помощи более простых подстановок.

1° Если выражение $R(\cos x, \sin x)$ содержит функцию $\cos x$ (или $\sin x$) только в четных степенях, то можно положить $t = \sin x$ (соответственно $t = \cos x$). Достаточно принять во внимание, что рациональные степени косинуса (синуса) рационально выражаются через синус (косинус):

$$\cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k = (1 - t^2)^k.$$

Так, например,

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos^4 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x + (1 - \sin^2 x)^2} = \frac{1 - t^2}{t^4 - 2t^2 + t + 1}.$$

2° Если числитель и знаменатель выражения $R(\cos x, \sin x)$ суть однородные многочлены одной и той же степени k относительно $\cos x$ и $\sin x$, то можно положить $t = \operatorname{tg} x$. В самом деле, заменим $\sin x$ на $t \cos x$, тогда все члены числителя и знаменателя будут иметь общего множителя $\cos^k x$, сократив дробь на этот множитель, представим $R(\cos x, \sin x)$ в виде рациональной функции аргумента t*.

---

* Применение принципа продолжения по непрерывности освобождает от необходимости исключать значения, при которых утрачивает смысл сокращение дроби.

Так, например ($k=2$), имеем:

$$\frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}.$$

3° Если числитель и знаменатель выражения $R(\cos x, \sin x)$ суть многочлен четной (либо нечетной) степени, относительно $\cos x$ и $\sin x$, то можно положить $t = \operatorname{tg} x$. В самом деле, степени двух различных членов данных многочленов отличаются на четное число единиц; в силу тождества $(\cos^2 x + \sin^2 x)^k = 1$ (при любом натуральном k) можно заменить данные многочлены тождественными однородными многочленами, умножив члены более низких степеней на некоторую степень тригонометрической единицы.

Так, например:

$$a)\ \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\cos x \sin x}{(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x} = \frac{t}{2 + t^2};$$

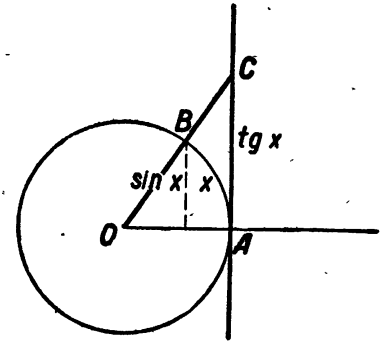
$$b)\ \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2}.$$

§ 104. Простейшие неравенства, содержащие аргумент и тригонометрические функции, и их применения.

Теорема. 1° *При всех действительных значениях x имеет место неравенство:*

$$|\sin x| \leqslant |x|. \qquad (1)$$

Доказательство. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то неравенство выполняется. Так как длина половины хорды единичной окружности, т. е. $\sin x$ (черт. 148), меньше длины половины стягиваемой дуги, т. е. x (где x — радианная мера), то $0 < \sin x < x$, откуда $|\sin x| < |x|$. Если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то длины половины дуги и полухорды выразятся числами $|x|$ и $|\sin x|$. Отсюда справедливость неравенства очевидна.



Черт. 148.

Если $|x| > \frac{\pi}{2}$, то имеем и подавно $|\sin x| < |x|$, так как $\frac{\pi}{2} > 1$, а $|\sin x| \leqslant 1$.

Итак, строгое неравенство (1) имеет место при всех значениях $x \neq 0$, при $x = 0$ имеет место равенство, ч. т. д.

Теорема. 2° *В интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство*

$$x < \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Доказательство. В самом деле, треугольник OAC (черт. 148) содержит круговой сектор OAB единичного круга, следовательно,

$$\text{площ. сект. } OAB < \text{площ. } \triangle OAC.$$

Имеем: площ. сект. $OAB = \frac{1}{2}\, x \cdot OA^2 = \frac{1}{2}\, x$ и площ. $\triangle OAB = \frac{1}{2}\, OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, откуда и следует неравенство (2), ч. т. д.

Следствие. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеют место следующие неравенства:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1. \tag{3}$$

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x. \tag{4}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}. \tag{5}$$

В самом деле,

$$0 < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

откуда вытекает неравенство (3).

Далее:

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) >$$

$$> 2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \qquad \text{(в силу (2) и (1))}$$

$$= x - \frac{x^3}{4},$$

отсюда и из (1) вытекают неравенства (4).

Имеем:

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2\left[\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right] < 2\left[\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right] \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^3 \qquad \text{(в силу (1) и (4))}$$

$$= \frac{x^4}{16},$$

откуда и вытекают неравенства (5).

Выведенные неравенства имеют применение в приближенных вычислениях при оценке погрешностей и при вычислении значений тригонометрических функций.

Составим разность значений синуса при значениях аргумента x и $x + h$:

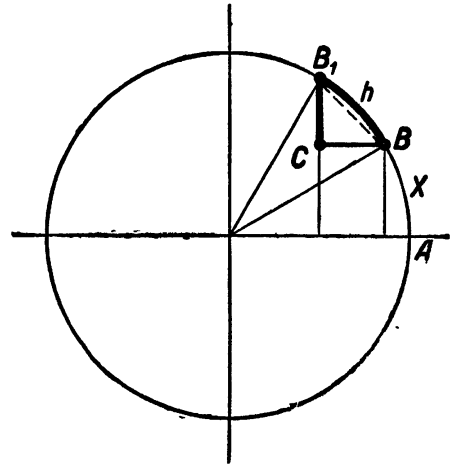
$$\sin (x + h) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}.$$

Так как $\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 1$, то

$$|\sin(x+h)-\sin x| < 2\,\frac{|h|}{2} = |h|.$$

Следовательно, погрешность, допускаемая при замене значения $\sin(x+h)$ значением $\sin x$, по абсолютной величине не меньше $|h|$, т. е. абсолютной величины приращения аргумента (выраженного в радианной мере). Заметим, что последнее неравенство можно вывести геометрически: из чертежа 149 имеем:

$$|\sin(x+h)-\sin x| = B_1C < BB_1 < B\breve{B}_1 = |h|.$$



Черт. 149.

Пример. Оценим погрешность, допущенную при замене $\sin 30°30'$ значением $\sin 30° = 0{,}5$. Погрешность не превосходит радианной меры угла $30'$. Следовательно,

$$\sin(30°30') - \sin 30° < \frac{\pi}{2\cdot 180} < \frac{32}{2\cdot 1800} < 0{,}01.$$

При составлении таблиц тригонометрических функций широко пользуются приближенными равенствами

$$\sin x \approx x \quad \text{и} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

в особенности при вычислении тригонометрических функций малых углов. Неравенства (4) и (5) дают следующие оценки погрешностей:

$$\sin x = x$$

с ошибкой, меньшей $\frac{x^3}{4}$ и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$ — с ошибкой, меньшей $\frac{x^4}{16}$.

Если данный угол содержит k градусов, то его радианная мера выразится числом $x = \frac{\pi k}{180}$ (мы придерживаемся градусной меры потому, что принятые на практике таблицы составляются в градусах), а для погрешности рассматриваемых приближенных формул получаем оценки (принять во внимание, что $\frac{\pi}{180} < \frac{1}{50}$):

$$\frac{x^3}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 k^3 < \frac{k^3}{2^2\cdot 5^3\cdot 10^3} = \frac{2k^3}{10^6} = 2\cdot 10^{-6}k^3$$

и

$$\frac{x^4}{16} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4 k^4 < \frac{k^4}{2^4\cdot 5^4\cdot 10^4} = 10^{-8}k^4.$$

Вычисляя по приближенной формуле $\sin 1^\circ$, получим:

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} = 0{,}01728$$

с ошибкой, меньшей чем $\frac{2}{10^6} < 0{,}00001$. Допустим, например, что приближенная формула $\sin x = x$ применяется для составления трехзначных натуральных тригонометрических таблиц. Неравенство (при $k = 7$)

$$\frac{2 \cdot 7^3}{10^6} < 0{,}001$$

показывает, что в данном случае приближенная формула пригодна для вычисления синусов углов от 1° до 7°. Воспользовавшись найденным значением $\frac{\pi}{180} = 0{,}01728$, получим (округляя результаты до 3-го знака):

$$\sin 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{,}017; \qquad \sin 5^\circ = 5\frac{\pi}{180} = 0{,}086.$$

$$\sin 2^\circ = 2\frac{\pi}{180} = 0{,}035; \qquad \sin 6^\circ = 6\frac{\pi}{180} = 0{,}104.$$

$$\sin 3^\circ = 3\frac{\pi}{180} = 0{,}052; \qquad \sin 7^\circ = 7\frac{\pi}{180} = 0{,}127.$$

$$\sin 4^\circ = 4\frac{\pi}{180} = 0{,}069.$$

Приближенная формула для косинусов малых углов $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ обладает большей степенью точности. Так, при составлении трехзначных таблиц этой формулой можно пользоваться непосредственно для вычисления косинусов углов до 15°. В самом деле, для погрешности получим следующую оценку:

$$10^{-8}k^4 \leqslant 10^{-8}\,15^4 < \frac{3 \cdot 0000}{10^8} < 0{,}001.$$

Известные точные значения тригонометрических функций для некоторых частных значений аргумента и формулы тригонометрических функций от половинного аргумента дают возможность с произвольной данной степенью точности вычислить значения тригонометрических функций для ряда углов. Так, например, зная

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

получим (вычисляя с точностью до трех знаков):

$$\cos 30^\circ = 0{,}866\ldots; \quad \sin 30^\circ = 0{,}500.$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = 0{,}966; \quad \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = 0{,}259.$$

$$\cos 7{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 15^\circ}{2}} = 0{,}991; \quad \sin 7{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^\circ}{2}} = 0{,}130.$$

Формулы сложения позволяют вычислить значения синуса и косинуса от углов, кратных тем, для которых эти значения уже найдены.

Так, в нашем случае можно считать известными значения функций от углов

$$7{,}5^\circ,\ 15^\circ,\ 22{,}5^\circ,\ 30^\circ,\ 37{,}5^\circ,\ 45^\circ.$$

Наконец, зная значения тригонометрических функций от „малых углов", можно, пользуясь теоремами сложения,

$$\sin(x \pm h) = \sin x \cos h \pm \cos x \sin h;$$
$$\cos(x \pm h) = \cos x \cos h \mp \sin x \sin h$$

вычислить эти значения для промежуточных аргументов. Таким образом, элементарными средствами без особого труда могут быть составлены трехзначные тригонометрические таблицы.

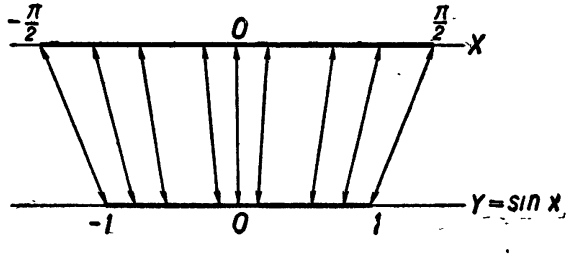
Для более точных вычислений обычно пользуются известными из курса „Высшей математики" разложениями тригонометрических функций в степенные ряды. Аппарат теории рядов дает удобные для вычислений формулы и позволяет достаточно точно произвести оценку погрешности.

Глава X

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 105. Основные обратные тригонометрические функции

Арксинус. Функция $y = \sin x$ в интервале $-\infty < x < \infty$ не является монотонной; как известно (§ 97), синус в каждом из сегментов $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ возрастает от -1 до 1, а на каждом из сегментов $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ убывает от 1 до -1. Всякому числу y, взятому на сегменте $-1 \leqslant y \leqslant 1$, соответствует на каждом из этих сегментов единственное значение аргумента x, удовлетворяющее условию $\sin x = y$. Следовательно, во всем интервале $-\infty < x < \infty$ существует бесконечное множество значений аргумента x, удовлетворяющих этому условию. Таким образом, для функции $\sin x$, рассматриваемой при всевозможных действительных значениях x, переход к обратной функции невозможен. Этот переход станет возможным, если рассматривать функцию $y = \sin x$ не при произвольных значениях x, а в каком-либо промежутке, в котором она монотонна.



Черт. 150.

Рассмотрим сегмент $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; на этом сегменте $\sin x$ возрастает от -1 до 1, и, следовательно, значения x и y связаны взаимно однозначным соответствием. На чертеже 150 показана схема

взаимно однозначного отображения сегментов $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-1 \leqslant y \leqslant 1$ друг на друга. В силу взаимной однозначности соответствия каждому значению y на сегменте $[-1, 1]$ соответствует единственное значение y на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Геометрическое построение дуги x по заданному значению ее синуса было рассмотрено в § 97.

Определение. *Функция, обратная функции* $y = \sin x$, *рассматриваемой на сегменте* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, *называется арксинусом.*

Эта функция обозначается так:

$$x = \arcsin y;$$

областью ее определения является сегмент $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Теперь y рассматривается как аргумент, а x — как функция. Чтобы не нарушать привычки в обозначениях (это не имеет принципиального значения), переставив буквы x и y, будем писать: $y = \arcsin x$.

Обычно, пользуясь геометрической терминологией, определение арксинуса формулируют следующим образом:

$\arcsin x$ *есть дуга, взятая в промежутке от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

синус которой равен числу x:

$$\sin(\arcsin x) = x^*.$$

Например, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Свойства арксинуса.

1° *Функция* $y = \arcsin x$ *на сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *возрастает от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$.

Это следует из монотонности синуса и взаимной однозначности отображения друг на друга сегментов:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant y < \frac{\pi}{2}.$$

2° $\arcsin x$ *есть нечетная функция.*

Доказательство. Дуга $-\arcsin x$ заключена в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

---

* Здесь, как обычно в тригонометрии, термин „дуга" можно понимать двояко: как число, измеряющее дугу, и как самую дугу, в зависимости от трактовки аргумента тригонометрической функции.

Далее:

$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x,$$

следовательно:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

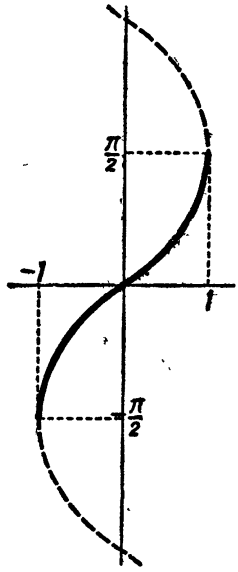
Чтобы построить график функции $y = \arcsin x$, достаточно построить график функции $x = \sin y$, считая y аргументом, и выделить дугу графика, для которой $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ (черт. 151).

Зная обратную функцию относительно $y = \sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, можно найти обратную функцию в прочих промежутках монотонности синуса. Дуга $x = \arcsin y + 2k\pi$ имеет синус, равный y:

$$\sin(\arcsin y + 2k\pi) = \sin(\arcsin y) = y$$

и содержится на сегменте $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (так как $-\frac{\pi}{2} < \arcsin y < \frac{\pi}{2}$), поэтому $x = \arcsin y + 2k\pi$ является обратной функцией относительно $y = \sin x$ на сегменте

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right].$$



Черт. 151.

Аналогично покажем, что на сегменте

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,$$

на котором $y = \sin x$ убывает от 1 до -1, обратная функция есть:

$$x = (\pi - \arcsin y) + 2k\pi.$$

В частности $x = \pi - \arcsin y$ есть обратная функция относительно $y = \sin x$ на сегменте $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

Арккосинус. Функция $y = \cos x$ убывает от 1 до -1 на сегментах $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ и возрастает от -1 до 1 на сегментах $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, следовательно, на каждом из этих сегментов возможен переход к обратной функции.

Определение. *Функция, обратная функции* $y = \cos x$ *на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant \pi$, *называется арккосинусом:*

$$x = \arccos y.$$

Областью определения арккосинуса является сегмент $[-1, 1]$.

В геометрических терминах это определение формулируют так (меняем местами буквы x и y): $\arccos x$ *есть дуга, взятая в промежутке от* 0 *до* π:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

косинус которой равен x:

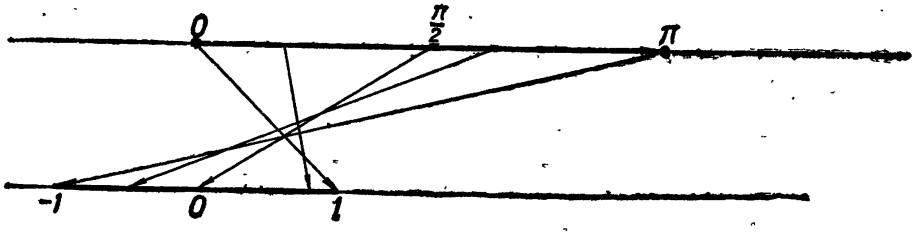
$$\cos(\arccos x) = x,$$

где $-1 < x \leqslant 1$.

Например, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos 1 = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Свойства арккосинуса

1° *Функция* $y = \arccos x$ *на сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *убывает от* π *до* 0.



Черт. 152.

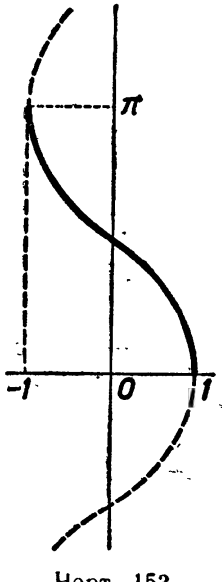
Это следует из того, что косинус убывает и сегменты $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$ взаимно однозначно отображаются друг на друга (черт. 152).

2° *Имеет место равенство:*

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

В самом деле, дуга $\pi - \arccos x$ расположена на сегменте $[0, \pi]$ и

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x.$$



Черт. 153.

Для построения графика функции $y = \arccos x$ достаточно взять выделенную на чертеже 153 дугу синусоиды, изображающейся уравнением $x = \cos y$.

Функции, обратные относительно $y = \cos x$, в прочих промежутках монотонности косинуса находятся следующим образом. На сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, на котором $y = \cos x$ убывает от 1 до -1, обратной функцией служит $x = \arccos y + 2k\pi$. В самом деле, дуга x заключена на сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ и имеет косинус, равный y.

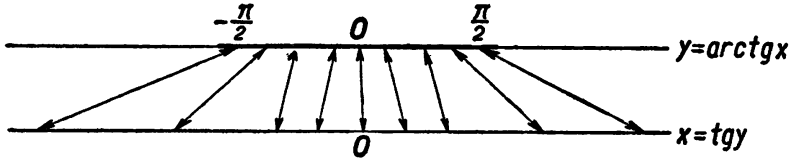
Аналогично устанавливается, что функция $x = -\arccos y + 2k\pi$ является обратной относительно $y = \cos x$ на сегменте $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$.

Арктангенс. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до ∞ в каждом из интервалов $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, поэтому в каждом из этих интервалов возможен переход к обратной функции.

Определение. *Функция, обратная относительно* $y = \operatorname{tg} x$ *в интервале* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, *называется арктангенсом:*

$$x = \operatorname{arc\,tg} y.$$

Так как значением тангенса может быть произвольное действительное число, то областью определения арктангенса служит интервал $-\infty < y < \infty$.



Черт. 154.

В геометрической терминологии определение арктангенса формулируется так:

$\operatorname{arc\,tg} x$ *есть дуга, взятая в интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2},$$

тангенс которой равен x, *где* x — *любое действительное число.* Например:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

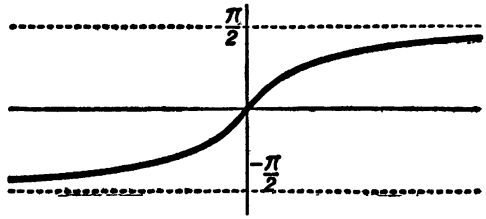
$$\operatorname{arc\,tg} (-1) = -\frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Свойства арктангенса. 1° $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *является возрастающей функцией, определенной при всех действительных значениях* x.

В самом деле, в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает, и взаимно обратные функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ взаимно однозначно отображают друг на друга интервалы $-\infty < x < \infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

2° $\operatorname{arc\,tg} x$ *является нечетной функцией:*

$$\operatorname{arc\,tg} (-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.$$



Черт. 155.

Для построения графика функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ достаточно построить изображенную на чертеже 155 ветвь тангенсоиды $x = \operatorname{tg} y$.

Отыскание обратной функции относительно тангенса в прочих интервалах монотонности не представляет затруднений: функция

$$x = \operatorname{arc\,tg} y + k\pi$$

является обратной относительно $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Арккотангенс. ***Определение.*** *Функция, обратная относительно* $y = \operatorname{ctg} x$ *в интервале* $(0, \pi)$, *называется арккотангенсом:*

$$x = \operatorname{arc\,ctg} y.$$

Областью ее определения является интервал $-\infty < y < \infty$.

Итак $\operatorname{arc\,ctg} x$ *есть дуга, взятая в интервале* $(0, \pi)$:

$$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi,$$

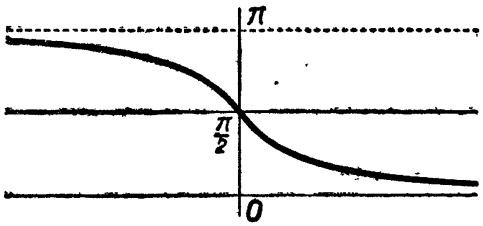
котангенс, который равен x:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x,$$

где x *— любое действительное число.*

Свойства арккотангенса.

1° $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ *является убывающей функцией, определенной при всех действительных значениях* x.



Черт. 156.

2°

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.$$

График функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ изображен на чертеже 156.

Функцией, обратной относительно $y = \operatorname{ctg} x$ в интервале и монотонности $(k\pi, (k+1)\pi)$, является функция $y = \operatorname{arc\,tg} x + k\pi$.

Обратные тригонометрические функции в дальнейшем сокращенно будем называть аркфункциями.

§ 106. Тригонометрические операции над аркфункциями

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

1° В силу определения обратных тригонометрических функций имеем:

$$\sin(\operatorname{arc\,sin} x) = x \quad \text{и} \quad \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x \tag{1}$$

на сегменте $[-1, 1]$, а также:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x \tag{2}$$

в интервале $(-\infty, \infty)$.

Равенства (1), в отличие от (2), не являются тождествами при всех действительных значениях x; они суть тождества лишь при $|x| \leqslant 1$. Так, например, при $|x| > 1$ выражение $\operatorname{arc\,sin} x$, а следовательно, и $\sin(\operatorname{arc\,sin} x)$, не имеет смысла, однако левая часть первого

равенства (1) имеет смысл при всех действительных x. На чертеже 157 графически показано различие между функциями

$$y = \sin(\arcsin x) \text{ и } y = x.$$

Ниже приводятся примеры простейших преобразований.

2° Положив $\alpha = \arcsin x$ в формуле $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, получим:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Перед радикалом следует взять знак $+$, ибо дуга $\alpha = \arcsin x$ заключена на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, в котором косинус неотрицателен, Итак, имеем:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

3° Аналогично найдем:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

4° $$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

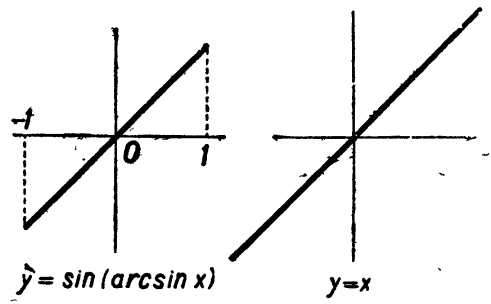
5° Из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ следует:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x} \quad (\text{где } x \neq 0).$$

6° Положим, в формуле $\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, выражающей синус через тангенс, $\alpha = \operatorname{arctg} x$. Так как при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ синус и тангенс имеют одинаковые знаки, то перед радикалом следует взять знак $+$. Следовательно:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Предлагаем учащимся самостоятельно разобрать все остальные возможные комбинации тригонометрических операций над аркфункциями.



Черт. 157.

7° $$\sin(\arcsin x + \arcsin y) =$$
$$= \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y) =$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

8° Полагая $x = y$, получим:

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

9° $\operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y) = \frac{\sin(\arcsin x + \arcsin y)}{\cos(\arcsin x + \arcsin y)} =$

$$= \frac{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}.$$

10° Покажем, что на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выражение $\cos(n \arccos x)$ (где n — натуральное число) совпадает с некоторым многочленом. В самом деле, в формуле

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots =$$
$$= \cos^n\alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha(1-\cos^2\alpha) + C_n \cos^{n-4}\alpha(1-\cos^2\alpha)^2 - \ldots$$

положим $\alpha = \arccos x$, тогда получим:

$$\cos(n \arccos x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

Многочлен, с которым совпадает $\cos(n \arccos x)$ на сегменте, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, называется полиномом Чебышева n-го порядка по имени великого русского ученого П. Л. Чебышева.

Преобразования, приведенные в примерах 7°—10°, можно разнообразить, если брать различные комбинации аркфункций и теорем сложения.

Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями менее элементарно и может приводить к функциям, изображающимся в различные промежутки разными алгебраическими выражениями. Рассмотрим, например, выражение

$$y = \arcsin(\sin x). \tag{3}$$

Утверждение, что это выражение тождественно равно x, является ошибочным, так как синус и арксинус суть взаимно обратные функции лишь для дуг, взятых в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Выражение $\arcsin(\sin x)$ имеет смысл при всех действительных x, однако его значение содержится (по определению арксинуса) на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Из (3) имеем:

$$\sin y = \sin x \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ то } y = x.$$

Если

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi, \quad \text{то} \quad y = \pi - x,$$

Если

$$\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi, \text{ то } y = x - 2\pi$$

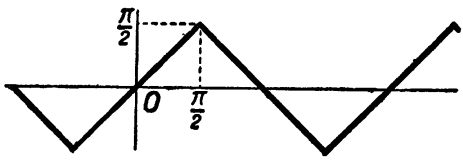
и т д.

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ представлен на чертеже 158 в виде ломаной линии.

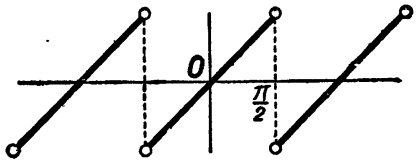
На чертеже 159 представлен график функции $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; как легко убедиться, имеем:

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \begin{cases} x \quad \left(\text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ x - \pi \quad \left(\text{если } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right) \\ x - 2\pi \quad \left(\text{если } \frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x - 2k\pi \quad \left(\text{если } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{cases}$$

точки $x = \pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; ... не принадлежат к области опре-



Черт. 158.



Черт. 159.

деления функции. График есть разрывная линия, состоящая из отдельных прямолинейных отрезков.

§ 107. Соотношения между аркфункциями

Соотношения между тригонометрическими функциями дополнительных дуг позволяют выразить друг через друга пары сходственных (по названию) аркфункций (арксинус и арккосинус, арктангенс и арккотангенс).

Теорема. *При всех допустимых значениях x имеют место соотношения:*

$$\left.\begin{aligned} \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Доказательство. В самом деле, дуги $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ имеют одинаковый синус:

$$\sin(\arcsin x) = x$$

(по определению арксинуса)

и

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$$

$$\left(\text{формулы приведения } \left[\frac{\pi}{2} - \varphi\right]\right).$$

Обе дуги заключены на одном и том же сегменте:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ (по определению арксинуса).}$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \text{ (по определению арккосинуса),}$$

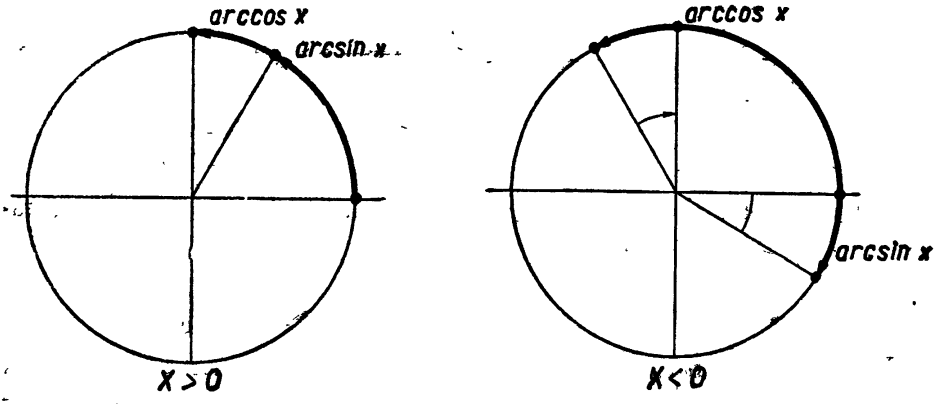
откуда:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, эти дуги равны:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x, \text{ ч. т. д.}$$

Аналогично доказывается второе соотношение (1). На чертеже 160 дано геометрическое пояснение равенства (1).



Черт. 160.

Другого рода соотношения между аркфункциями вытекают из формул, связывающих значения тригонометрических функций от одного и того же аргумента.

1° Из равенства

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

следует, что дуги $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ имеют одинаковый синус и, по определению арксинуса и арктангенса, расположены в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, эти дуги равны:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Аналогично преобразуются друг от друга аркфункции, значения которых заключены в одном и том же промежутке:

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \arccos x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Так, например,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi.$$

2° Из равенства

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

следует, что дуги $\arcsin x$ и $\arccos \sqrt{1-x^2}$ имеют одинаковый косинус. При $0 \leqslant x \leqslant 1$ обе дуги содержатся в первой четверти, а потому равны:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}. \tag{2}$$

При $-1 \leqslant x < 0$ равенство (2) не может выполняться, так как дуга $\arcsin x$ заключена в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, дуга $\arccos \sqrt{1-x^2}$ в промежутке от 0 до π. Если $x < 0$, то $-x > 0$, и мы получим $\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1-(-x)^2} = -\arccos \sqrt{1-x^2}$. Итак, имеем окончательно:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2} & (\text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1) \\ -\arccos \sqrt{1-x^2} & (\text{если } -1 \leqslant x < 0) \end{cases}$$

Так, например,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}.$$

Рассмотрим преобразование $\arccos x$ в арксинус. Из соотношения:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$ получим:

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

Если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то получим:

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

Следовательно:

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & (\text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1) \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & (\text{если } -1 \leqslant x < 0) \end{cases}$$

В качестве упражнения рекомендуем проверить справедливость формул:

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (\text{если } 0 < x \leqslant 1) \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (\text{если } -1 \leqslant x < 0) \end{cases}$$

и

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} & (\text{если } x > 0) \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi & (\text{если } x < 0) \end{cases}$$

Тригонометрические теоремы сложения позволяют выполнять преобразования суммы или разности двух (или нескольких) аркфункций. Чтобы уяснить характер трудностей, связанных с этими преобразованиями, рассмотрим подробно преобразование суммы арксинусов

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y \qquad (3)$$

в арксинус, где x и y — любые два действительные числа, взятые при условиях $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. По определению арксинуса имеем:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$-\pi \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

Для значения дуги γ возможны следующие три случая.

Случай I:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I.

Так, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant y \leqslant 0$ имеем:

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant 0,$$

откуда:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если при $x > 0$, $y > 0$ имеет место случай I, то:

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Откуда $\arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y$,

Следовательно (в силу возрастания синуса в первой четверти):

$$\sin(\arcsin x) \leqslant \sin(\arccos y)$$

или

$$x \leqslant \sqrt{1-y^2} \quad \text{и} \quad x^2+y^2 \leqslant 1.$$

Аналогично покажем, что если при $x<0$, $y<0$ имеет место случай I, то:

$$x^2+y^2 \leqslant 1.$$

Случай II:

$$\frac{\pi}{2} < \gamma \leqslant \pi.$$

В этом случае $x>0$, $y>0$ и

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi,$$

откуда:

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

и (взяв синус от обеих частей) $x^2+y^2>1$.

Случай III:

$$-\pi \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Этот случай имеет место при $x<0$, $y<0$ и

$$-\pi \leqslant \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2};$$

изменив знаки противоположные, приходим к предыдущему случаю:

$$\pi \geqslant \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$x^2+y^2>1.$$

Из сопоставления результатов следует, что признаком случая I при одинакозых по знаку значениях аргументов (т. е. при $xy>0$) может служить неравенство $x^2+y^2 \leqslant 1$. Случай II имеет место, если $x>0$, $y>0$ и $x^2+y^2>1$; случай III имеет место, если $x<0$, $y<0$ и $x^2+y^2>1$.

Из равенства (3) находим:

$$\sin\gamma = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Дуги γ и $\gamma' = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$ имеют одинаковый синус, но (по определению арксинуса) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma' \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в случае I $\gamma = \gamma'$, в случае II $\gamma = \pi - \gamma'$ и в случае III $\gamma = -\pi - \gamma'$.

Итак, имеем окончательно:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) \\ \quad (\text{если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1) \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) \\ \quad (\text{если } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1) \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right) \\ \quad (\text{если } x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1). \end{cases}$$

В качестве упражнения предлагаем доказать, что:

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ \quad (\text{если } x+y \geqslant 0) \\ 2\pi - \arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ \quad (\text{если } x+y<0) \end{cases}$$

Глава XI

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 108. Элементарные функции

Нижеследующие функции, рассматриваемые в элементарной математике, будем называть основными элементарными функциями.

$$f(x)=c=\text{const},\quad x^n\ (n\text{ — целое число}),\quad \sqrt[n]{x},\quad a^x,$$

$\lg_a x$ (где $a>0$ и $a\neq 1$), x^α (где α — иррациональное число),

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Каждая из перечисленных основных элементарных функций (над полем действительных чисел) рассматривается в соответствующей области определения, т. е. *при всех действительных значениях x, при которых данная математическая операция имеет смысл и результатом ее выполнения является действительное число.* Так, функция $f(x)=c=\text{const}$ ставит в соответствие всякому действительному числу одно и то же число (функция постоянна), областью ее определения служит множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, \infty)$. Этот же интервал служит областью определения функций

$$x^n,\quad \sqrt[2k+1]{x},\quad a^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{arc\,tg} x,\quad \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Областью определения функций $\lg_a x$ и x^α служит интервал $(0, \infty)$. Область определения $\sqrt[2k]{x}$ есть множество неотрицательных чисел, $x\geqslant 0$, область определения $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$) есть множество всех

действительных чисел, не равных $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (или $k\pi$). Областью определения функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ служит сегмент $[-1, 1]$.

Свойства перечисленных основных элементарных функций были изучены в предыдущих параграфах.

При помощи последовательного выполнения двух основных элементарных операций могут быть получены различные, так называемые сложные элементарные функции, над этими последними функциями в свою очередь можно выполнять основные операции и т. д., т. е. можно рассматривать сложные функции с любым числом последовательно выполняемых элементарных операций.

Определение. *Функции, которые могут быть получены из основных элементарных посредством арифметических действий и образования сложных функций, называются элементарными функциями**.

Таким образом, *закон соответствия элементарной функции может быть представлен при помощи формулы, содержащей символы арифметических действий и основных элементарных операций. Под областью определения элементарной функции принято подразумевать множество всех допустимых значений аргумента (или систем значений аргументов), т. е. множество всех значений, при которых содержащиеся в формуле математические операции (в заданном порядке) выполнимы в поле действительных чисел.*

Область определения элементарной функции устанавливается на основании следующих общих принципов.

1° *При выполнении арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) функции-компоненты рассматриваются совместно на одном и том же множестве значений аргумента, являющемся общей частью областей их определения. Значения аргумента, обращающие в нуль знаменатели, должны быть исключены из множества допустимых значений.*

2° *Если функция (сложная) задана как результат последовательного выполнения двух операций:*

$$u=f(x) \text{ и } y=F(u), \text{ т. е. } y=F(f(x)),$$

то допустимыми считаются все те значения x (или системы значений аргументов), которые содержатся в области определения функции $f(x)$ и соответствующие значения промежуточного аргумента $u=f(x)$ содержатся в области определения функции $F(u)$.

Положим, например, $f(x)=x+\sqrt{x}$. Область определения первого слагаемого есть множество всех действительных чисел: $-\infty<x<\infty$, второго слагаемого есть множество всех неотрицательных чисел: $0\leqslant x<\infty$. Область определения суммы есть общая часть этих промежутков, т. е. множество всех неотрицательных чисел.

---

* Арифметические и основные элементарные операции предполагаются взятыми в конечном числе, это значит, что действия, связанные с предельным переходом (рассматриваемые в анализе), как, например, бесконечные ряды, бесконечные произведения и т. п., не считаются допустимыми.

Для суммы $x+\sqrt{x}+\arcsin x$ область определения есть сегмент $0 \leqslant x \leqslant 1$, т. е. общая часть областей определения слагаемых:

$$(-\infty, \infty),\ [0, \infty) \text{ и } [-1, 1].$$

Функцию $y=\sqrt{\lg_a x}$ (где $a>1$) можно представить в виде сложной функции:

$$u=\lg_a x,\quad y=\sqrt{u}.$$

Операция $\lg_a x$ выполнима при условии $x>0$, операция $\sqrt{\lg_a x}$ выполнима при $u \geqslant 0$. Следовательно, областью определения данной функции служит множество значений x, при которых $\lg_a x \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 1$.

Примечание. Не всякое аналитическое выражение определяет функцию над полем действительных чисел. Так, например, значения алгебраической суммы $-1-x^2$ отрицательны при всех действительных значениях x, поэтому выражения $\sqrt{-1-x^2}$ и $\lg(-1-x^2)$ не определяют над полем действительных чисел никаких функций.

В практике нахождения области определения элементарной функции надлежит руководствоваться следующими правилами:

1° Знаменатели дробных выражений должны быть отличными от нуля.

2° Подкоренные выражения радикалов четной степени должны быть неотрицательными.

3° Выражения, возводимые в иррациональную степень, а также в степень, содержащую в показателе аргументы, должны быть положительными.

4° Выражения, находящиеся под знаком логарифма, должны быть положительными.

5° В выражениях вида M^N основание и показатель степени не должны оба обращаться в нуль при одних и тех же значениях аргументов (выражение 0^0 не имеет смысла).

Применение неравенств к отысканию области определения

На нижеследующих примерах показано применение неравенств к отысканию области определения элементарных функций.

1. Найти область определения функции заданной формулой

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

Решение. Значения каждого из слагаемых действительны при всех значениях x, удовлетворяющих системе неравенств:

$$x^2-3x+2 \geqslant 0 \text{ и } 3+2x-x^2>0.$$

Решаем каждое неравенство отдельно. Корни первого трехчлена суть 1 и 2; поэтому первое неравенство выполняется в двух проме-

жутках: при $-\infty < x \leqslant 1$ и при $2 \leqslant x < \infty$. Корни второго трехчлена суть -1 и 3, поэтому второе неравенство выполняется в промежутке:

$$-1 < x < 3.$$

Оба неравенства выполняются совместно в общей части системы двух промежутков $-\infty < x \leqslant 1, 2 \leqslant x < \infty$ и промежутка $-1 < x < 3$; эта общая часть состоит из двух промежутков:

$$-1 < x \leqslant 1 \text{ и } 2 \leqslant x < 3.$$

2. Найти область определения функции

$$\sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}}.$$

Решение. Значение подкоренного выражения не отрицательно, если

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} \geqslant 0.$$

Последнее имеет место, если

$$\left.\begin{array}{l} 1-x \geqslant 0 \\ x^2-5x+6 > 0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} 1-x \leqslant 0 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{array}\right\}$$

Корни квадратного трехчлена x^2-5x+6 суть 2 и 3, поэтому неравенство:

$$x^2-5x+6 > 0$$

имеет место, если $x < 2$ или $x > 3$. Присоединяя неравенство $1-x \geqslant 0$, получим решение первой системы: $x \leqslant 1$. Неравенство $x^2-5x+6 < 0$ удовлетворяется, если $2 < x < 3$. Присоединяя неравенство $1-x \leqslant 0$, получим решение второй системы $2 < x < 3$. Итак, область определения данной функции состоит из двух промежутков:

$$-\infty < x \leqslant 1 \text{ и } 2 \leqslant x < 3.$$

3. Найти область определения функции $\arcsin \frac{1}{x-1}$.

Арксинус имеет смысл, если выражение, находящееся под его знаком, по абсолютной величине не больше 1; итак, $\frac{1}{|x-1|} \leqslant 1$, откуда $|x-1| \geqslant 1$. Следовательно, $x-1 \geqslant 1$ или $x-1 \leqslant -1$, откуда находим область определения в виде двух промежутков $2 \leqslant x < \infty$ и $-\infty < x \leqslant 0$.

4. Найти область определения функции

$$\lg_{10}[1-\lg_{10}(x^2-5x+16)].$$

Решение. Рассматриваемое выражение имеет смысл, если

$$1-\lg_{10}(x^2-5x+16) > 0$$

или: $\lg_{10}(x^2-5x+16)<1,$

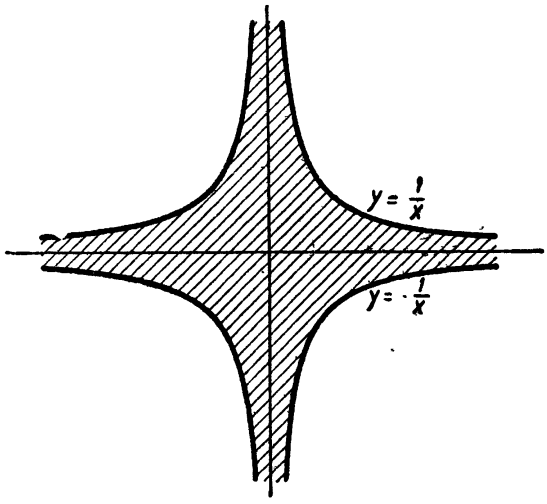
откуда: $x^2-5x+16<10$

или: $x^2-5x+6<0.$

Корни квадратного трехчлена суть 2 и 3. Искомая область определения есть промежуток $2<x<3$.

Примеры отыскания области определения элементарных функций.

1) $y=\frac{1}{x}$ — область определения есть множество действительных чисел, отличных от нуля, т. е. множество двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.



Черт. 161.

2) $y=\sqrt{x-1}$ — область определения есть множество действительных чисел, не меньших единицы: $1\leqslant x$.

3) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ — область определения есть множество действительных чисел, больших 1.

4) $y=\lg_a(-x)$ — область определения есть множество всех отрицательных чисел, $x<0$, ибо $-x>0$, если $x<0$.

5) $y=\operatorname{ctg} x^2$. Из условия $x^2\neq k\pi$ или, что то же, $x\neq\pm\sqrt{k\pi}$ находим область определения в виде бесконечного множества интервалов:

$$\ldots(-\sqrt{3\pi}, -\sqrt{2\pi}), (-\sqrt{2\pi}, -\sqrt{\pi}), (0, \sqrt{\pi}), (\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}), \ldots.$$

6) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$. Область определения состоит из двух промежутков: $-1\leqslant x<0$ и $0<x\leqslant 1$. Значение $x=0$ следует исключить как обращающее в 0 знаменатель.

7) $a^{\lg_a x}$. Область определения — интервал $(0, \infty)$.

8) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$. Область определения $x\geqslant 2$.

9) Функция:	Область определения:
$\frac{1}{x^2-2x}$	множество трех интервалов: $(-\infty, 0), (0,2)$ и $(2, \infty)$.
$\sqrt{\sin x}$	множество сегментов $[2k\pi, (2k+1)\pi]$
$x^{-\sqrt{2}}$	$(0, \infty)$
x^x	$(0, \infty)$
$\sqrt{\lg_2 x-1}$	$[2, \infty)$
$\sqrt{2^x-1}$	$[0, \infty)$
$\lg_2(\lg_2(\lg_2 x))$	$(2, \infty)$

10) $f(x, y) = \arcsin xy$ — область определения находится из условия $|xy| \leqslant 1$, откуда $|y| \leqslant \frac{1}{|x|}$,

или

$$-\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x} \text{ при } x > 0$$

и

$$\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{x} \text{ при } x < 0.$$

Это есть область ограничения ветвями двух гипербол (черт. 161).

§ 109. Классификация элементарных функций

Операции, рассматриваемые в элементарной математике, принято классифицировать следующим образом: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень, извлечение корня называются алгебраическими действиями.

Возведение в иррациональную степень, логарифмирование, тригонометрические и обратные тригонометрические операции не считаются алгебраическими действиями, а относятся к числу так называемых элементарных трансцендентных операций.

Для элементарных функций принята следующая классификация *.

Определения. I. *Элементарные функции, которые могут быть получены из двух основных функций* $f_1(x) = x$, *и* $f_2(x) = \text{const} = 1$ *при помощи любого числа последовательно выполненных алгебраических действий и умножения на числовые коэффициенты, называются алгебраическими (явными) функциями.*

II. *Все прочие элементарные функции называются элементарными трансцендентными функциями.*

Итак, закон соответствия элементарной трансцендентной функции выражается формулой, содержащей элементарные операции, но не может быть выражен посредством лишь алгебраических действий.

Рациональная функция (см. § 9) является частным случаем алгебраической функции; в этом частном случае закон соответствия может быть выражен формулой, содержащей лишь четыре арифметические действия.

Определение. *Алгебраические функции, не являющиеся рациональными, называются иррациональными функциями.*

Таким образом, закон соответствия иррациональной (явной) функции может быть выражен посредством формулы, содержащей радикалы, но не может быть выражен формулой, содержащей лишь четыре арифметические действия над аргументом и числами.

---

* Здесь и ниже всюду речь идет лишь о явных функциях, для которых закон соответствия непосредственно выражен прямым указанием математических операций, которые следует выполнить над аргументами.

Как известно, рациональные функции разделяются на целые рациональные функции или многочлены и на дробные рациональные функции (рациональные функции были изучены в гл. II).

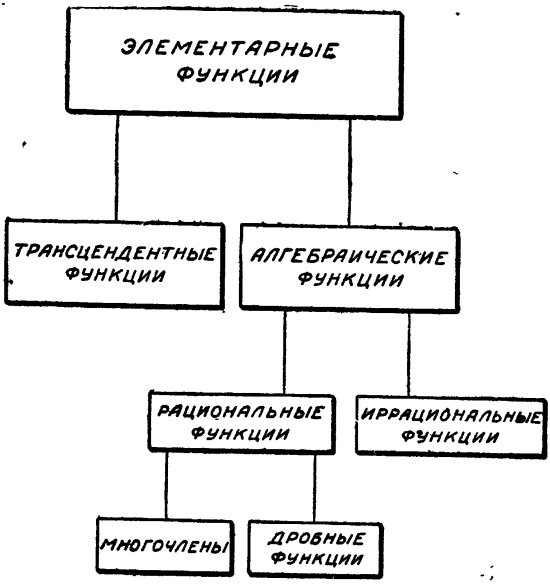
На чертеже 162 представлена схема изложенной классификации элементарных функций.

Примечание. Не всякая функция, заданная при помощи формулы, содержащей трансцендентные операции, является трансцендентной. Так, например, функция, заданная формулой

$$y = 2^{\lg_2(1+x^2)},$$

не является трансцендентной, ибо ее закон соответствия может быть выражен посредством алгебраических действий:

$$y = 1 + x^2.$$



Черт. 162

Аналогично функция $y = \sqrt[3]{x^9}$, заданная иррациональным выражением, на самом деле не является иррациональной, ибо ее закон соответствия может быть задан формулой:

$$y = x^3.$$

Таким образом, здесь существенен характер закона соответствия, а не внешний вид формулы, его изображающей.

Примеры.

1. Функция $y = \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{3x} + \sqrt[3]{x}$ является алгебраической иррациональной. Она может быть получена из двух основных функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = 1$ при помощи следующей цепи алгебраических действий:

$$u_1 = 2 - x^2 = 2f_2(x) - f_1(x)\cdot f_1(x), \quad u_2 = \sqrt{u_1}, \quad u_3 = 3f_1(x),$$

$$u_4 = \frac{u_2}{u_3}, \quad u_5 = \sqrt[3]{f_1(x)}$$

и, наконец,

$$y = u_4 + u_5.$$

2. Примером алгебраических функций могут служить:

$x^2 - x$, $\sqrt{2}x^3 - x^2 + x + 1$, $\dfrac{1-x^2}{2+x^2}$ (рациональные функции);

$\sqrt{x^3}$, $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}}{x+1}$ (иррациональные функции).

3. Примерами трансцендентных функций могут служить: $x^{\sqrt{2}}$, $\sin^2 x$, $\sin x^2$, $\lg(1+x^2)$, $a^{\arccos x}+\sqrt{\cos x}$.

Кроме элементарных или явных алгебраических, к классу алгебраических (вообще говоря, не элементарных) функций относятся функции, служащие решениями алгебраических уравнений. Именно, пусть:

$$P(x, y)=a_n(x)\,y^n+a_{n-1}(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_0(x)$$

многочлен с двумя аргументами x и y, отличный от нуль-многочлена. Корни уравнения $P(x, y)=0$, где неизвестным считается y, суть функции другого аргумента. Эти функции также считаются алгебраическими. Как известно, не всякое алгебраическое уравнение может быть решено в радикалах, поэтому в общем случае алгебраическая функция не может быть представлена (явно) при помощи формулы, содержащей алгебраические действия.

Для всякой явной алгебраической функции может быть составлено алгебраическое уравнение, которому она удовлетворяет. В самом деле, рациональная функция $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ удовлетворяет уравнению $Q(x)\,y-P(x)=0$, явная иррациональная функция

$$y=R(x) \qquad (R)$$

(где $R(x)$ — выражение, содержащее радикалы) удовлетворяет алгебраическому уравнению, которое получим, освободив уравнение (R) от радикалов (см. § 68).

Можно доказать (доказательство в общем случае выходит за рамки данного курса), что *трансцендентная функция не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению.*

Пример. Покажем, что не существует никакого алгебраического уравнения:

$$a_0(x)+a_1(x)\,y+a_2(x)\,y^2+\ldots+a_n(x)\,y^n=0 \qquad (a)$$

(где $a_i(x)$ многочлены), которому удовлетворяет функция $\sin x$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует такое уравнение (a), что при подстановке $y=\sin x$ левая часть будет тождественно равна нулю. Значение, равное нулю, функция $y=\sin x$ имеет для бесконечного множества значений $x=k\pi$. Положив $y=0$, получим уравнение $a_0(x)=0$, имеющее бесконечное множество корней $x=k\pi$. Следовательно, $a_0(x)\equiv 0$ и уравнение (a) принимает вид:

$$y\,[a_1(x)+\ldots+a_n(x)\,y^{n-1}]=0.$$

Так как функция $y=\sin x$ не равна тождественно нулю, то она должна удовлетворять уравнению:

$$a_1(x)+a_2(x)\,y+\ldots+a_n y^{n-1}=0\,*.$$

---

* Сомнение могут вызвать лишь значения $x=k\pi$, при которых $y=0$. Однако левая часть этого уравнения (где $y=\sin x$) есть непрерывная функция, равная нулю при всех значениях $x\neq k\pi$. Следовательно, она равна нулю и при этих значениях.

Аналогично покажем, что $a_1(x) = 0$, а также, что $a_2(x) = a_3(x) = \ldots = a_n(x) = 0$. Следовательно, вопреки предположению, левая часть уравнения (a) есть нуль-многочлен, ч. т. д.

Аналогично можно показать, что прочие тригонометрические функции не могут удовлетворять алгебраическим уравнениям.

§ 110. Исследование функций элементарными средствами

Задача исследования функций не имеет определенного содержания, так как различные функции могут обладать весьма разнообразными индивидуальными свойствами и в каждом конкретном случае должно быть указано, какие именно свойства являются предметом исследования. В элементарное исследование функций обычно входит следующий комплекс вопросов: *установление области определения функции заданной формулой, отыскание промежутков монотонности (возрастание и убывание), отыскание наибольших и наименьших значений функции (в области ее определения либо в некотором данном промежутке), исследование функции при значениях аргумента в окрестности особых его значений, а также при достаточно больших по абсолютной величине значениях аргумента, установление специфических свойств исследуемой функции: ограниченность (в области определения либо в данном промежутке), четность и нечетность, периодичность, отыскание периода.*

Исследование основных элементарных функций производится непосредственно, исходя из определений этих функций. Такое исследование было выполнено в предыдущих главах и параграфах для каждой из основных функций. Исследование (речь идет об элементарных функциях) элементарными средствами функции заданной формулой заключается в установлении ее свойств, исходя непосредственно из известных свойств алгебраических действий и основных трансцендентных операций, содержащихся в формуле, свойств неравенств, скалярных свойств действий, тождественных преобразований и т. п. При выполнении этого исследования обычно применяются различные частные приемы, обусловленные индивидуальными свойствами исследуемой функции, поэтому не представляется возможным выработать систему стандартных правил, применение которых во всех случаях приводит к цели. Более того, далеко не всегда элементарными средствами возможно выполнить требуемое исследование. Навыки в целесообразном применении различных частных приемов достигаются практикой. Ниже приводятся примеры установления различных свойств функций путем непосредственного исследования.

Примеры.

1) Функция $y = \frac{x+1}{x}$ убывает в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В самом деле, $y = 1 + \frac{1}{x}$; первое слагаемое постоянно, а второе убывает в указанных интервалах.

2) Функция $y=\frac{1}{x^2+x+1}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{4}{3}$. В самом деле, $y=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)2+\frac{3}{4}}$. Наименьшее значение знаменателя (при $x=-\frac{1}{2}$) есть $\frac{3}{4}$, а наибольшее значение дроби есть $\frac{4}{3}$. Знаменатель возрастает при $x\geqslant-\frac{1}{2}$ и убывает при $x\leqslant-\frac{1}{2}$, следовательно, y убывает при $x\geqslant-\frac{1}{2}$ и возрастает при $x\leqslant-\frac{1}{2}$.

3) Рассмотрим функции: $y_1=\frac{1}{x}$, $y_2=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, $y_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$, $y_4=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$, ... В интервале $0<x<\infty$ первая функция убывает, а вторая возрастает (так как знаменатель $1+\frac{1}{x}$ убывает), третья убывает, четвертая возрастает и т. д.

4) Функция $y=2^{x^2}$ возрастает в интервале $0<x<\infty$ и убывает в интервале $-\infty<x<0$. В самом деле, показательная функция 2^u возрастает, а показатель $u=x^2$ возрастает при $x\geqslant0$ и убывает при $x\leqslant0$.

5) Функция $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$. В самом деле, при $x>0$ имеем:

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Так как $\frac{1}{x^2}$ убывает, то знаменатель также убывает, а y возрастает.

При $x<0$ имеем:

$$y=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Так как $\frac{1}{x^2}$ возрастает, то $|y|$ убывает, а y возрастает. Итак, данная функция возрастает как при $x>0$, так и при $x<0$.

6) Функция $y=\sqrt{x^2+1}-x$ убывает. При $x<0$ утверждение очевидно, так как x^2 убывает, $\sqrt{x^2+1}$ убывает, а x возрастает. При $x>0$ имеем (перенося иррациональность в знаменатель):

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Утверждение очевидно, так как знаменатель возрастает.

7) Функция $y=\sqrt{1-\cos x}$ — периодическая с периодом 2π, так как при значениях аргумента x и $x+2\pi$ она имеет одно и то же значение. Число

2π является наименьшим периодом. В самом деле, если число l есть период, то имеет место тождество

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{1-\cos(x+l)},$$

откуда (подкоренное выражение неотрицательно)

$$1-\cos x=1-\cos(x+l) \text{ и } \cos x=\cos(x+l),$$

значит, l есть период косинуса, а наименьший период $\cos x$ есть $l=2\pi$. Данная функция на сегменте $0\leqslant x\leqslant\pi$ возрастает от 0 до $\sqrt{2}$, так как на этом сегменте $\cos x$ убывает от 0 до -1, а $1-\cos x$ возрастает от 0 до 2. На сегменте $[\pi, 2\pi]$ данная функция убывает от $\sqrt{2}$ до 0. Наибольшее значение y есть $\sqrt{2}$, а наименьшее 0.

8) Функция $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ в промежутке $0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ убывает от ∞ до 2, а в промежутке $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ возрастает от 2 до ∞. В самом деле,

$$y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

В промежутке $0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ аргумент синуса $2x$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, знаменатель $\sin 2x$ возрастает от 0 до 1, а y убывает от ∞ до 2. Для промежутка $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ рассуждения аналогичные.

9) Функция $f(x)=2^x-2^{-x}$ нечетная. В самом деле,

$$f(-x)=2^{-x}-2^{-(-x)}=-(2^x-2^{-x})=-f(x).$$

§ 111. Построение графиков элементарных функций

Как известно, в основу построения графика функции в декартовой прямоугольной системе координат положен следующий принцип: всякому допустимому значению аргумента ставится в соответствие точка плоскости $M(x, y)$ с абсциссой, равной x, и с ординатой $y=f(x)$, равной значению функции в точке x. Это соответствие определяет на плоскости множество точек, называемое графиком данной функции.

Построение графиков имеет большое вспомогательное значение при изучении функций, так как оно дает геометрическое изображение закона соответствия исследуемой функции. Характерные свойства функций (например, монотонность, ограниченность, четность и нечетность и т. д.) получают наглядное геометрическое толкование. Построение графиков имеет также большое практическое значение. Разумеется, что всякий начерченный график является неточным, приближенным, однако если отклонение от „истинного графика“ находится в пределах допустимой погрешности, то можно быстро находить значения функции по данным значениям аргумента, либо обратно находить значения аргумента по данным значениям функции, не прибегая к вычислениям. В экспериментальных науках графическое изображение функций имеет широкое применение. Достаточно указать, что во многих случаях кон-

струируются „самопишущие“ измерительные приборы, автоматически вычерчивающие графики изменения рассматриваемых физических величин.

Строго говоря, выполнить построение графика функции „по точкам“ невозможно, так как множество допустимых значений аргумента является (в общем случае) бесконечным, и фактически невозможно нанести на чертеж бесконечное множество точек. В основу построения графиков должно быть положено исследование свойств данной функции. Построение отдельных точек должно служить цели уточнения графика. Обычно исследование функции и построение графика не разделяются, а проводятся слитно. Знание свойств функции позволяет по мере их установления сделать „набросок“ графика и представить себе хотя бы весьма грубо его форму. Полученный набросок можно уточнять построением отдельных точек, придавая аргументу конкретные численные значения и вычисляя соответствующие значения функции.

Ниже приводятся общие (далеко не исчерпывающие) указания, которые надо иметь в виду при исследовании функций и построении графиков.

1° Следует установить область определения функции и выделить соответствующее множество точек оси абсцисс.

2° Следует учитывать специфические свойства функции. Именно:

a) Если функция ограничена: $|f(x)|<M$ (где M — некоторое положительное число), то ее график содержится в полосе, ограниченной линиями $y=\pm M$. Если функция ограничена сверху (снизу) $f(x)<M$ (или $f(x)>m$), то ее график лежит ниже (выше) прямой $y=M$ (или $y=m$).

b) Если функция четная или нечетная, то достаточно построить график для неотрицательных значений аргумента, а затем построить множество точек, симметричных в случае четной функции относительно оси ординат, а в случае нечетной функции — относительно начала координат.

c) Если функция периодическая, то достаточно построить ее график на отрезке, равном по длине периоду (наименьшему положительному), а затем „повторять“ его (график) периодически посредством параллельного переноса вправо и влево в направлении оси абсцисс на расстояние, равное периоду.

3° Следует установить промежутки монотонности данной функции. На этих промежутках график „поднимается вверх“ в случае возрастания и „опускается вниз“ в случае убывания функции. Следует найти наибольшие и наименьшие значения (если они существуют) в области определения функции, а также в отдельных промежутках.

4° Следует установить промежутки, в которых данная функция положительна (отрицательна); для этого надо решить неравенство $f(x)>0$ (или $f(x)<0$). Корни уравнения $f(x)=0$ дадут точки пересечения графика с осью абсцисс.

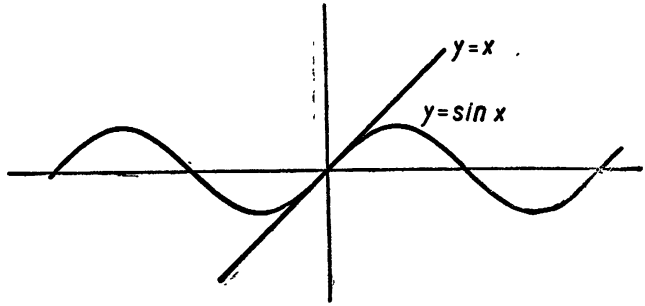
5° Особому исследованию подлежит функция в окрестности тех точек, в которых формула, ее изображающая, теряет смысл.

Надо исследовать функцию при достаточно больших по абсолютной величине значениях аргумента (или, согласно терминологии анализа, в окрестностях точек ∞ и $-\infty$).

6° Известные неравенства позволяют в ряде случаев уточнить форму и расположение графика.

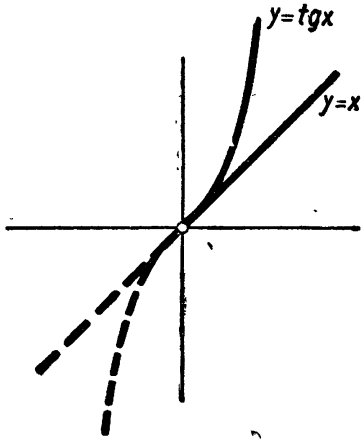
Примеры.

1. Неравенство $|\sin x| < |x|$ (где $x \neq 0$) показывает, что при $x > 0$ синусоида расположена ниже прямой $y = x$, а при $x < 0$ выше этой прямой. Начало координат есть единственная общая точка синусоиды и биссектрисы координатного угла (черт. 163).

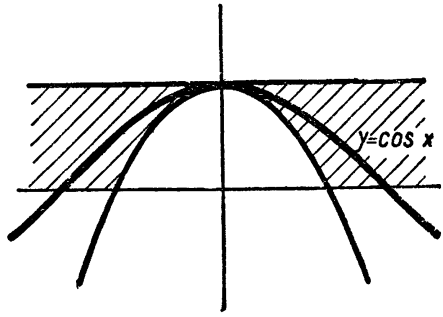


Черт. 163.

2. Неравенство $x < \operatorname{tg} x$ $\left(\text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ показывает, что в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ тангенсоида расположена выше биссектрисы координатного угла (черт. 164).



Черт. 164.



Черт. 165.

3. Неравенства $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$ показывают, что график косинуса заключен в части плоскости, ограниченной прямой $y = 1$ (сверху) и параболой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (снизу, черт. 165).

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Имеем: $x = \sin y$; так как $|\sin y| \leqslant |y|$, то $|x| \leqslant |\arcsin x|$. Следовательно, график арксинуса при $x > 0$ (или $x < 0$) лежит выше (ниже) биссектрисы координатного угла.

Иллюстрацией применения изложенных указаний может служить выполненное в предшествующих главах и параграфах исследование и построение графиков основных элементарных функций (подробно разобранные примеры см. ниже, § 113).

Примечание. Данные указания вовсе не обязательно применять в том порядке, в котором они изложены; целесообразный порядок в различных случаях может быть различным. Следует заметить также, что не всегда все изложенные указания могут быть выполнены элементарными средствами.

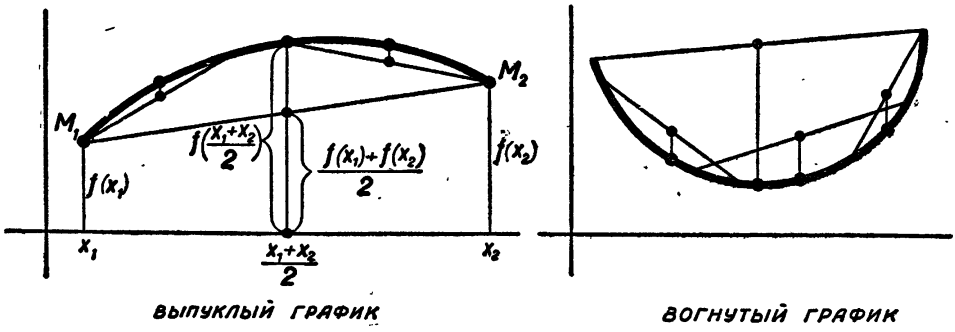
Выпуклость и вогнутость графика. Рассмотрим график данной функции $y=f(x)$ в некотором промежутке. Пусть M_1M_2 — любая хорда графика, а x_1 и x_2 — абсциссы ее концов. Середина хорды M_1M_2 имеет координаты:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

соответствующая точка дуги графика имеет координаты:

$$\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

График функции $f(x)$ в данном промежутке будем называть вогнутым (или выпуклым), если середина любой его хорды лежит выше (или ниже) соответствующей точки графика (черт. 166).



Черт. 166.

Вогнутость и выпуклость графика функции в данном промежутке характеризуется выполнением следующих неравенств:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (A)$$

для вогнутой линии;

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (B)$$

для выпуклой линии, где x_1 и x_2 два произвольные неравные значения аргумента, содержащихся в данном промежутке.

Исследование выполнимости этих неравенств даже для несложных функций может быть сопряжено со значительными трудностями, однако в целом ряде случаев это исследование не представляет затруднений.

1) Линия $y=a^x$ вогнута в интервале $(-\infty, \infty)$. В самом деле:

$$f\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)=\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} \text{ и } \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}.$$

Так как среднее геометрическое чисел a^{x_1} и a^{x_2} (неравных и положительных) меньше их среднего арифметического, то имеем:

$$\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}<\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}. \qquad (A)$$

2) Линия $y=\lg_a x$ выпукла при $a>1$ (вогнута при $a<1$) в интервале $(0, \infty)$. Имеем:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\lg_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

и

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\lg x_1+\lg x_2}{2}=\lg\sqrt{x_1x_2}.$$

В силу свойств средних арифметического и геометрического и монотонности логарифма имеем:

$$\lg_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\lg_a\sqrt{x_1x_2} \quad (\text{при } a>1);$$

$$\lg_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\lg_a\sqrt{x_1x_2} \quad (\text{при } a<1).$$

3) Синусоида $y=\sin x$ выпукла на сегменте $[0, \pi]$. Имеем:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\sin\frac{x_1+x_2}{2}$$

и

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}.$$

Так как $0\leqslant x_1\leqslant\pi$ и $0\leqslant x_2\leqslant\pi$ и $x_1\neq x_2$, то:

$$0<\frac{|x_1-x_2|}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$0<\cos\frac{x_1-x_2}{2}<1,$$

а потому:

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}. \qquad (B)$$

Предлагаем учащимся показать, что синусоида вогнута на сегменте $[-\pi, 0]$.

4. Линия $y=x^n$ (где n — натуральное число, большее 1) вогнута в промежутке $0\leqslant x<\infty$. В самом деле, при $n=2$ и $x_1\neq x_2$ имеем:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4}<\frac{x_1^2+x_2^2+(x_1^2+x_2^2)}{4}=$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

В данном частном случае ($n=2$) это неравенство справедливо при всех действительных и неравных x_1 и x_2. Следовательно, квадратная парабола вогнута во всем интервале $(-\infty, \infty)$. Далее применим метод полной индукции. Допустим, что линия $y=x^{n-1}$ вогнута в интервале $(0, \infty)$:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n-1} < \frac{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}}{2}. \qquad (1)$$

Покажем, что (в этом предположении) линия $y=x^n$ является вогнутой в том же интервале. В самом деле, из неравенств (1) при $x_1>0$, $x_2>0$ и $x_1 \neq x_2$ получим:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n} < \frac{\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)(x_1+x_2)}{4} = \frac{x_1^n+x_2^n+\left(x_2x_1^{n-1}+x_1x_2^{n-1}\right)}{4}.$$

Так как

$$x_2x_1^{n-1}+x_1x_2^{n-1} < x_1^n+x_2^n \quad \text{(см. § 77, стр. 232),}$$

то получим окончательно:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n} < \frac{x_1^n+x_2^n}{2}.$$

Следовательно, будучи справедливым при $n=2$, неравенство справедливо при всех значениях $n>2$, т. е. при всех натуральных $n>1$.

Воспользовавшись свойством четности и нечетности, нетрудно показать, что при n четном линия вогнута во всем интервале $(-\infty, \infty)$, а при n нечетном линия выпукла в промежутке $(-\infty, 0)$.

5. Полагая в неравенстве (2) $x=\sqrt[n]{y}$, после несложных преобразований получим неравенство:

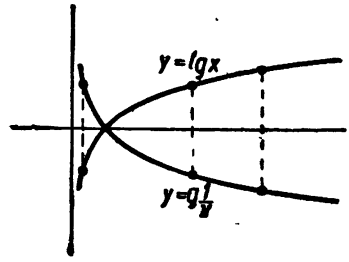
$$\frac{\sqrt[n]{y_1}+\sqrt[n]{y_2}}{2} < \sqrt[n]{\frac{y_1+y_2}{2}},$$

выражающее свойство выпуклости линии $\sqrt[n]{y}$ в промежутке $(0, \infty)$.

§ 112. Применение простейших преобразований к построению графиков

1. Симметрия относительно оси абсцисс. Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=-f(x)$, построив линию, симметричную относительно оси абсцисс. В самом деле, ординаты соответствующих точек обеих линий противоположны.

Пример. Положим $y=\lg_a \frac{1}{x}$. Имеем (при $x>0$): $y=-\lg_a x$. Следовательно, искомый график получим зеркальным отражением в оси абсцисс графика логарифма (черт. 167).



Черт. 167.

2. Симметрия относительно оси ординат. Зная график функции $y=f(x)$, можно получить график функции $y=f(-x)$, построив линию, симметричную относительно оси ординат. В самом деле, точка с

абсциссой x одной линии и точка с абсциссой $-x$ другой линии имеют одну и ту же ординату.

Пример.

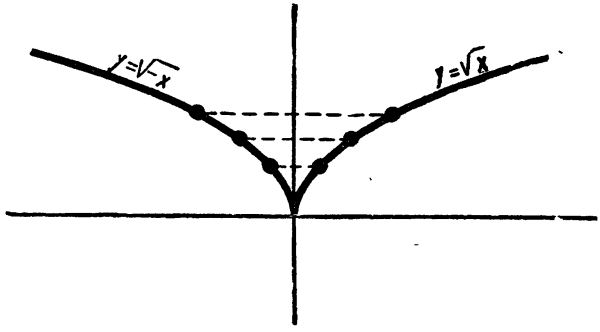
1. График функции $y=\sqrt{-x}$ получается зеркальным отражением в оси ординат графика $y=\sqrt{x}$ (черт. 168).

2. Графики функций $y=x^2+x+1$ и $y=x^2-x+1$ симметричны относительно оси OY (черт. 169).

3. Параллельный перенос.

1° Зная график функции $f(x)$, можно построить график функции $f(x)+b$ при помощи параллельного переноса в направлении оси ординат на расстояние, равное b (точнее, на расстояние $|b|$ вверх при $b>0$ и вниз при $b<0$). В самом деле, пусть $y'=f(x)$; выполняя преобразование переноса $y=y'+b$, получим:

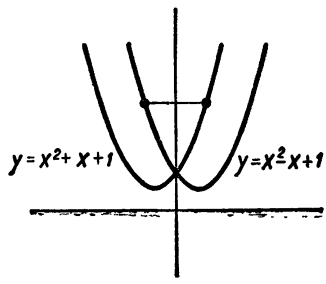
$$y=f(x)+b$$ (черт. 170).



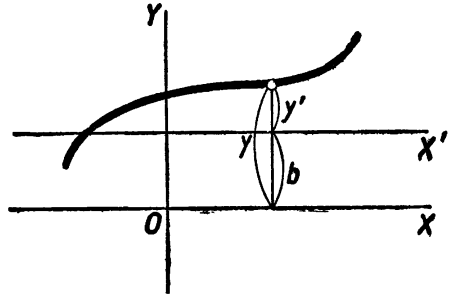
Черт. 168.

2° Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=f(x-a)$ при помощи параллельного переноса в направлении оси абсцисс на расстояние, равное a (точнее, на расстояние $|a|$ „вправо“ при $a>0$ и „влево“ при $a<0$). В самом деле, пусть $y=f(x')$; выполняя преобразование переноса $x=x'+a$, получим:

$$y=f(x-a).$$



Черт. 169.



Черт. 170.

Примеры.

1. График $y=\frac{1}{x-1}$ получается переносом гиперболы $y=\frac{1}{x}$ вправо на расстояние, равное 1 (черт. 171).

2. График $y=\lg 2x$ (основание логарифмов — любое число, большее 1) получается переносом линии $y=\lg x$ вверх на расстояние, равное $\lg 2$, так как $y=\lg x+\lg 2$.

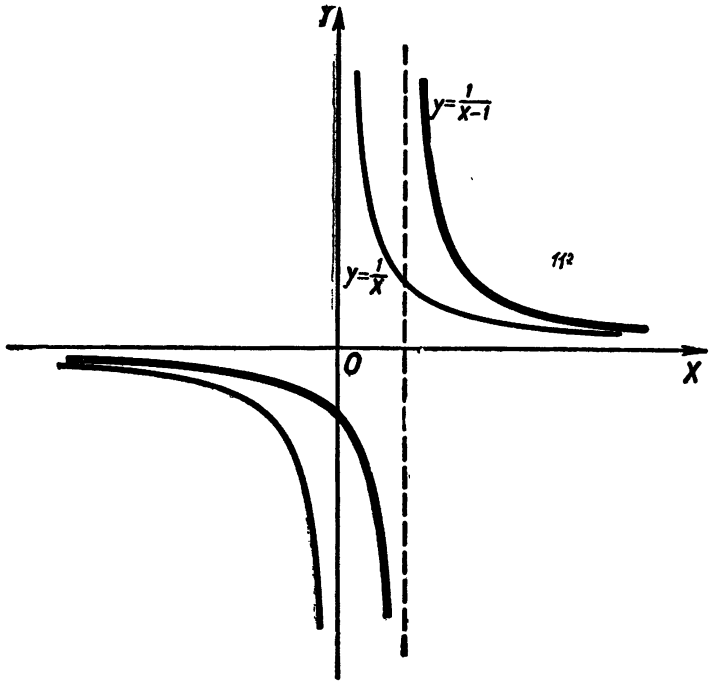
3. Положим:

$$y=\frac{x}{x+1}.$$

Выполняя деление с остатком, получим:

$$y=1-\frac{1}{x+1}.$$

График может быть получен из гиперболы $y=\frac{1}{x}$ путем следующей цепи преобразований: $y_1=\frac{1}{x+1}$ — перенос влево ($a=-1$), $y_2=-y_1$ (зеркальное отражение в оси абсцисс), $y=1+y_2$ — перенос вверх (черт. 172).



Черт. 171.

4. Растяжение от осей координат.

Преобразование растяжения от данной оси l в k раз ставит в соответствие (преобразует) точке M плоскости точку M', лежащую на прямой $MP \perp l$, расположенную по ту же сторону от прямой l, что и точка M, причем $PM'=kPM$ (черт. 173 $k=3$). При $k<1$ точка M' расположена ближе к оси l, чем точка M, в этом случае „растяжение" называют сжатием к оси l в $\frac{1}{k}$ раз*.

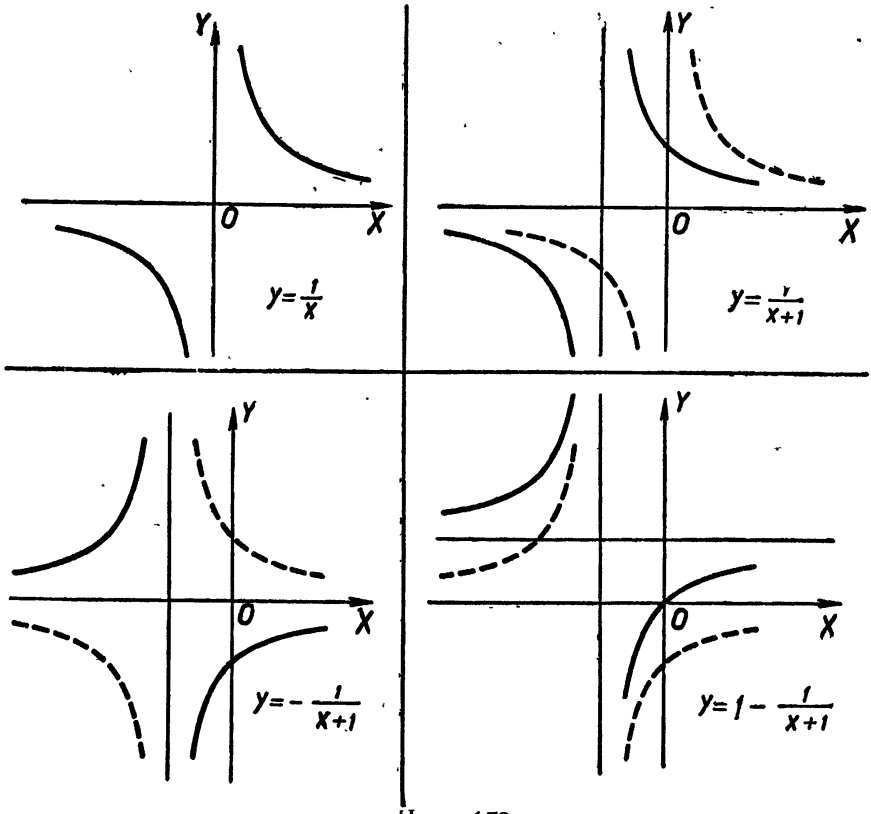
При растяжении в k раз от оси абсцисс точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x, ky)$. Зная график функции $f(x)$, можно построить

* В целях единообразия терминологии удобно не различать случаи растяжения и сжатия и употреблять общий термин „растяжение".

график функции $kf(x)$ (где $k>0$), выполняя растяжение в k раз от оси абсцисс. В самом деле, пусть $y'=f(x)$; выполняя преобразование растяжения $y=ky'$, получим:

$$y=kf(x).$$

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функции $f(kx)$, выполняя растяжение в $\frac{1}{k}$ раз (сжатие в k раз) от оси ординат. В са-



Черт. 172.

мом деле, пусть $y=f(x')$; выполняя преобразование растяжения $x=\frac{1}{k}x'$, получим:

$$y=f(kx).$$

Последовательное выполнение двух растяжений от оси абсцисс и от оси ординат с одним и тем же коэффициентом k называется растяжением в k раз от начала координат. При этом преобразовании точка $M'(x', y')$ переходит в точку $M(x, y)$, где

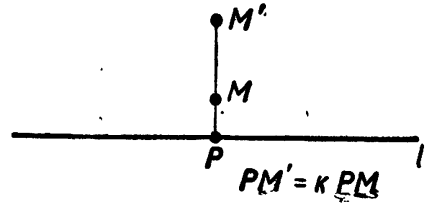
$$x=kx', \quad y=ky'. \tag{1}$$

Растяжение в k раз от начала координат есть гомотетия с центром в точке $O(0, 0)$ и с коэффициентом подобия, равным k.

Если известен график функции $f(x)$, то, выполняя последовательно указанные растяжения, получим: $y = kf\left(\frac{1}{k}x\right)$ — достаточно положить $y' = f(x')$, применив формулы (1).

Пример. График функции $y = a\sin nx + b\cos nx$.

1° График функции $y = \sin nx$, где $n > 0$, получается при помощи растяжения синусоиды $y = \sin x$ в $\frac{1}{n}$ раз от оси ординат или, что то же, при помощи сжатия к оси ординат в n раз. Рассматриваемое преобразование синусоиды называется также преобразованием ее периода, так как при этом преобразовании период 2π заменяется новым периодом $l = \frac{2\pi}{n}$.



Черт. 173.

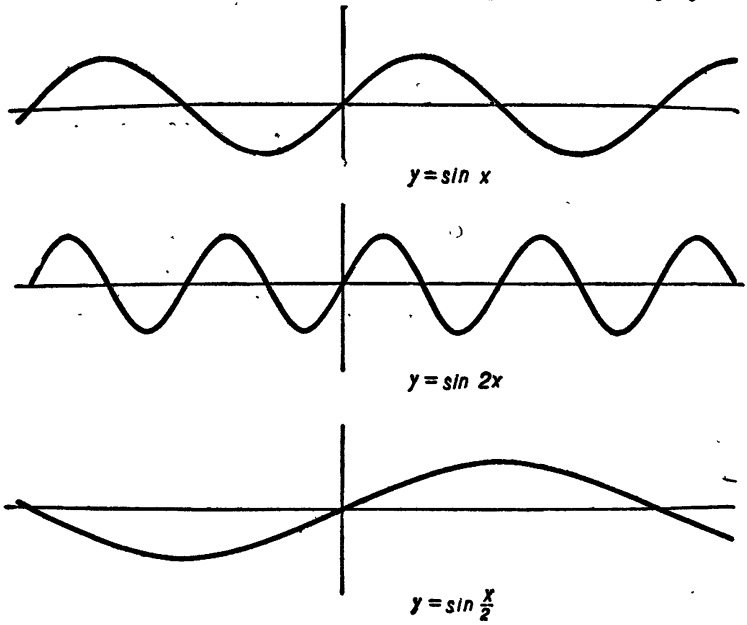
В этом нетрудно убедиться и непосредственно:

$$\sin n(x+l) = \sin n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = \sin x.$$

Заметим, что l есть наименьший (положительный) период функции $\sin nx$. В самом деле, если $\sin n(x+l) = \sin nx$, то положив $x' = nx$, получим:

$$\sin(x'+nl) = \sin x'.$$

Наименьшее положительное число, удовлетворяющее этому условию при



Черт. 174.

любом x', есть $nl = 2\pi$, откуда $l = \frac{2\pi}{n}$; на чертеже 174 представлены синусоиды: a) обыкновенная, b) сжатая к оси ординат в 2 раза: $y = \sin 2x$ (период $l = \pi$); c) растянутая в 2 раза: $y = \sin\frac{x}{2}$ (период $l = 4\pi$).

Допустим, например, что мы условились считать аргументом синуса число, выражающее градусную меру дуги. Обозначив через x и x' соответственно радианную и градусную меры дуги, имеем:

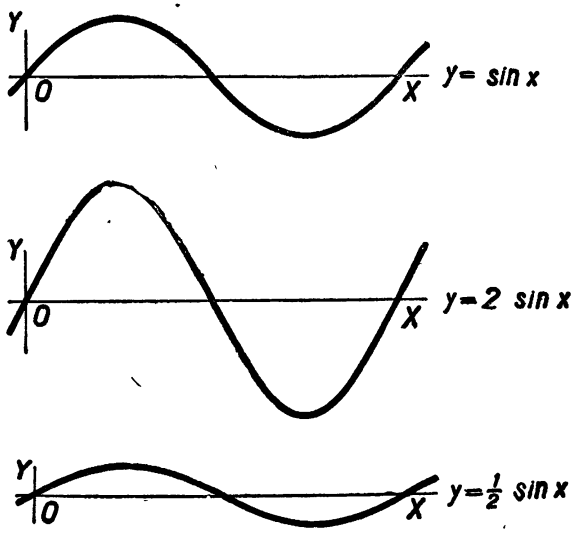
$$x = \frac{\pi}{180} x' \text{ и } y = \sin x = \sin \frac{\pi}{180} x'.$$

Следовательно, переход к градусной мере равносилен растяжению синусоиды в $\frac{180}{\pi}$ раз от оси ординат.

При $n < 0$ график функции $y = \sin nx$ получается растяжением от оси ординат в $\frac{1}{|n|}$ раз и зеркальным отражением в оси абсцисс, так как

$$y = \sin nx = -\sin |n| x.$$

2° График функции $y = A \sin x$, где $A > 0$, получается при помощи растяжения синусоиды $y = \sin x$ в A раз от оси абсцисс. Наибольшее (наименьшее) значение $A \sin x$ равно A (соответственно $-A$). Число A называется амплитудой, или „размахом" преобразованной синусоиды, а рассматриваемое преобразование синусоиды растяжения называется также преобразованием амплитуды. При $A < 0$ следует выполнить растяжение от OX в $|A|$ раз и зеркальное отражение относительно оси абсцисс. На чертеже 175 изображены графики $y = \sin x$,



Черт. 175.

$$y = 2 \sin x, \quad y = \frac{1}{2} \sin x.$$

3° График функции $y = \sin(x + \alpha)$ получается параллельным переносом начала координат в точку $O'(-\alpha, 0)$. Число α называется начальной фазой, а рассматриваемое преобразование — сдвигом фазы

4° График функции $y = A \sin(nx + \alpha)$ получается из обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ при помощи последовательного выполнения рассмотренных преобразований: $x' = nx$ (преобразование периода), $x'' = x' + \alpha$ (сдвиг фазы) и $y' = Ay$ (преобразование амплитуды).

5° Рассмотрим функцию $y = a \sin nx + b \cos nx$. Определим „вспомогательный" угол α из условия:

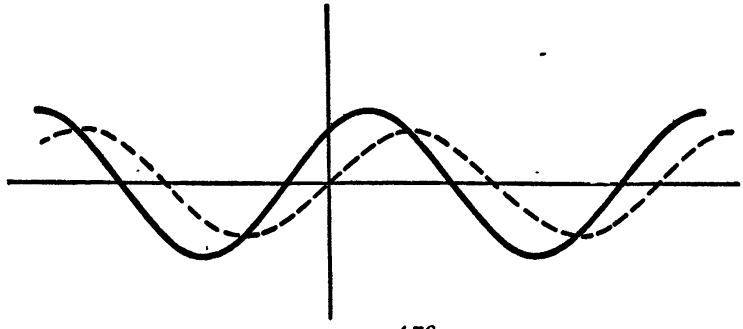
$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} *.$$

---

* Это возможно, так как точка $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ лежит на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ и радиус OM определяет единственно возможное направление конечной стороны угла α.

Знак перед радикалом выберем одинаковым со знаком числа a, тогда $\cos\alpha > 0$, и можно считать $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$; имеем:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin nx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos nx\right) =$$
$$= A\sin(nx+\alpha) \quad (\text{где } A = \sqrt{a^2+b^2}).$$



Черт. 176.

На чертеже 176 представлен график функции:

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь $A = \sqrt{2}$, $n = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (пунктиром намечена обыкновенная синусоида).

§ 113. Примеры построения графиков элементарных функций

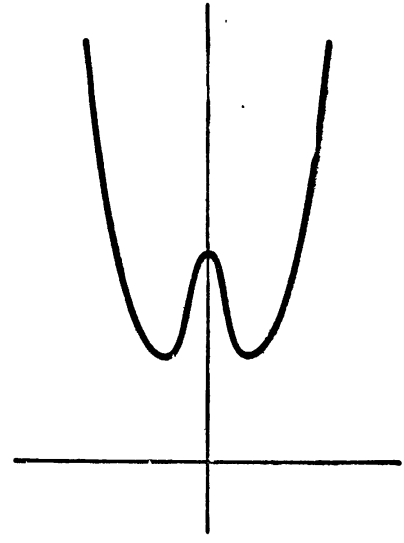
На нижеследующих примерах показано применение изложенных в предшествующих параграфах основных принципов построения графиков элементарными средствами.

Примеры.

1. График биквадратного трехчлена. Положим, например, $y = x^4 - 4x^2 + 5$. Область определения — множество всех действительных чисел. Функция четная, следовательно, линия симметрична относительно оси ординат. Рассмотрим данную функцию при $x \geqslant 0$. Выделив полный квадрат, получим:

$$y = (x^2-2)^2 + 1. \qquad (1)$$

Наименьшее значение есть $y = 1$ при $x = \sqrt{2}$. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ функция убывает от 5 до 1, а в промежутке $\sqrt{2} \leqslant x < \infty$ возрастает (это ясно из равенства (1)) от 1 до ∞ (черт. 177).



Черт. 177.

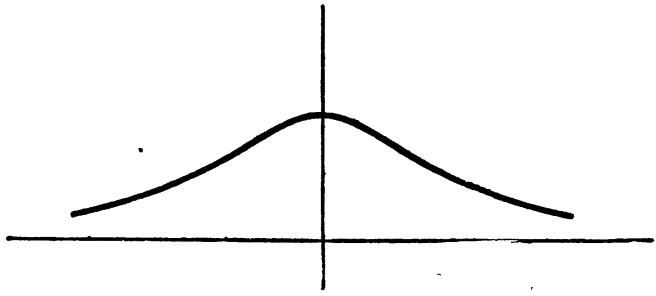
2. $y = \frac{1}{1+x^2}$. Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$. Функция четная и ограниченная, так как $0 < y \leqslant 1$. Наименьшее значение знаменателя есть 1 при $x = 0$, поэтому наибольшее значение функции есть 1 при $x = 0$. При $x \geqslant 0$ функции убывает и $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$.

Итак, в промежутке $[0, \infty)$ y убывает от 1 до 0. Составим таблицу частных значений, например:

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	...
y	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	...

График изображен на чертеже 178.

3. $y=\frac{x}{1+x^2}$. Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$. Функция нечетная. Исследуем ее при $x \geqslant 0$. Пусть x_1 и x_2 — два произвольные неотри-



Черт. 178.

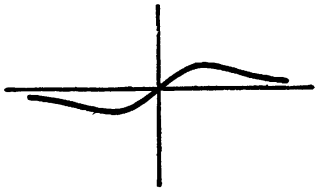
цательные значения аргумента, взятые при условии $0 \leqslant x_1 < x_2$. Составив разность значений функции, после несложных преобразований получим:

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\frac{1}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(1 - x_1x_2).$$

Если

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1, \text{ то } f(x_2) - (x_1) > 0,$$

т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Значит, на сегменте $[0, 1]$ функция возрастает $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{1}{2}\right)$, так как большему значению аргумента соответствует большее ее значение. При $1 \leqslant x_1 < x_2$ будем иметь $x_1x_2 > 1$, и $f(x_1) > f(x_2)$. Значит, в промежутке $[0, \infty)$ данная функция убывает. Значение $f(1)=\frac{1}{2}$ является наибольшим. Функция ограничена: $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.



Черт. 179.

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0.$$

Для уточнения графика рекомендуем составить таблицу значений y с точностью до 0,01 для значений

$$0,\ 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75,\ 1,\ 0{,}5,\ 2,\ \ldots,\ 10.$$

График представлен на чертеже 179.

4. Построить график $y=x-\frac{k}{x}$, где $k>0$. Область определения — множество двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Функция нечетная. Исследуем ее в интервале $(0, \infty)$. Так как y есть сумма двух слагаемых, произведение которых постоянно:

$$x\cdot\frac{k}{x}=k, \quad \text{то (при } x>0)$$

функция имеет наименьшее значение, равное $f(\sqrt{k})=2\sqrt{k}$, при условии $x=\frac{k}{x}$, т. е. при $x=\sqrt{k}$.

В этом же можно убедиться иначе, применив преобразование выделения полного квадрата:

$$y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{k}{x}}\right)^2+2\sqrt{k}.$$

Покажем, что в промежутке $0<x\leqslant 2\sqrt{k}$ функция убывает, а в промежутке $2\sqrt{k}\leqslant x<\infty$ возрастает. В самом деле,

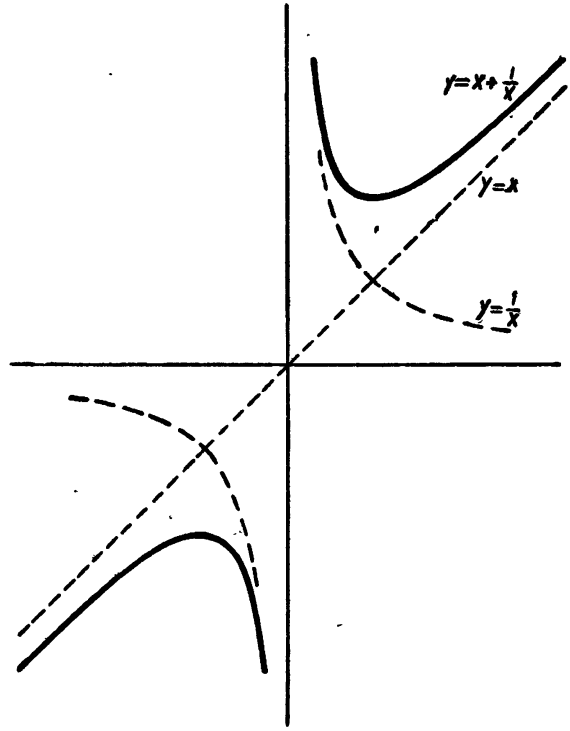
$$y_2-y_1=(x_2-x_1)\left(1-\frac{k}{x_2x_1}\right)\begin{cases}<0, \text{ если } 0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{k}\\ >0, \text{ если } \sqrt{k}\leqslant x_1<x_2.\end{cases}$$

Неравенства $y>x$ и $y>\frac{k}{x}$ (при $x>0$) показывают, что график расположен на координатной плоскости выше прямой $y=x$ и выше гиперболы $y=\frac{k}{x}$. Рассмотрим разность между ординатой линии $y=x+\frac{k}{x}$ и ординатой прямой $y=x$; имеем:

$$\lim_{x\to\infty}(y-Y)=\lim\frac{k}{x}=0.$$

Следовательно, расстояние точки графика $M(x, y)$ от прямой $y=x$ может быть сделано как угодно малым при достаточно больших значениях x. При $x>0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$.

Итак, функция убывает от ∞ до $2\sqrt{k}$ в промежутке $(0, \sqrt{k}]$ и возрастает от $2\sqrt{k}$ до ∞ в промежутке $[\sqrt{k}, \infty)$. График (при $k=1$) представлен на чертеже 180.



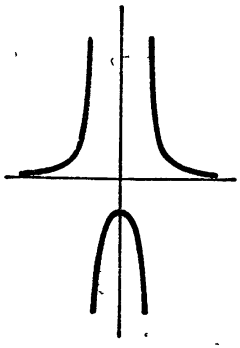
Черт. 180.

5. Построить график $y=\frac{1}{x^2-1}$. Область определения — множество трех интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$, $(1, \infty)$. Функция четная. Исследуем ее

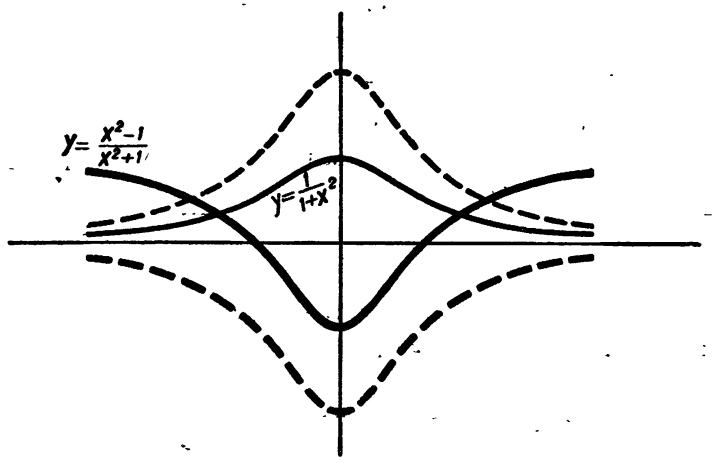
при значениях $x \geqslant 0$. Если $0 \leqslant x < 1$, то $y < 0$; если $x > 1$, то $y > 0$; имеем:

$$\lim_{x \to 1} y = \begin{cases} -\infty, & \text{если } x < 1; \\ \infty, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

В промежутке $0 \leqslant x < 1$ функция убывает от -1 до $-\infty$, а в интервале $1 < x < \infty$ убывает от ∞ до 0.



Черт. 181.



Черт. 182.

Для уточнения графика рекомендуем составить таблицу значений через промежутки 0,25. График представлен на чертеже 181.

6. Построить график $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Выделяя целую часть, получим:

$$y = 1 - \frac{2}{x^2+1}.$$

Искомый график может быть получен из графика $y = \frac{1}{x^2+1}$ (пример 2) путем следующих преобразований: растяжение от оси абсцисс в 2 раза, симметрия относительно оси абсцисс, перенос вверх на расстояние 1 (черт. 182).

7. Построить график $y = \frac{x^2-1}{x^4}$. Область определения — множество двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Функция четная. Исследуем ее при $x > 0$. Выделив полный квадрат, получим:

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Наибольшее значение есть $y = \frac{1}{4}$ при $x = \sqrt{2}$. В промежутке $0 < x \leqslant \sqrt{2}$ функция возрастает от $-\infty$ до $\frac{1}{4}$, а в промежутке $[\sqrt{2}, \infty)$ убывает от $\frac{1}{4}$ до 0. Ось абсцисс линия пересекает в точке $x = 1$. В интервале $(0,1)$ $y < 0$, а в интервале $(1, \infty)$ $y > 0$. График представлен на чертеже 183.

8. Построить график $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. Область определения — множество двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Имеем:

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График состоит из двух полупрямых, изображенных на чертеже 184.

9. Построить график

$$y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=\begin{cases}-(x+2) & \text{при } x\leqslant -2;\\ x+2 & \text{при } x\geqslant -2\end{cases}$$

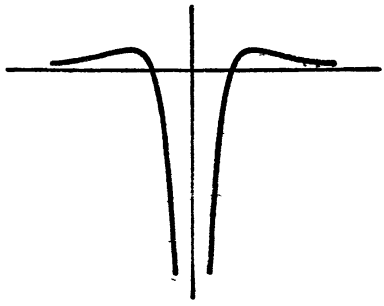
и

$$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}-x+1 & \text{при } x\leqslant 1;\\ x-1 & \text{при } x\geqslant 1.\end{cases}$$

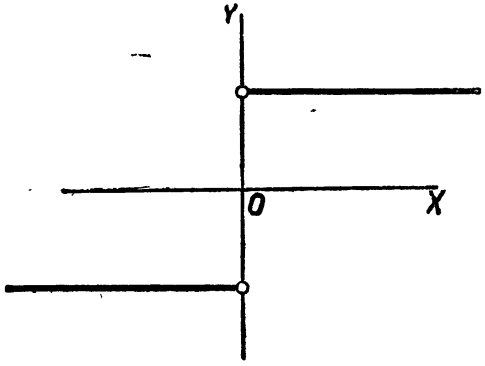
Следовательно,

$$y=|x+2|+|x-1|=\begin{cases}-2x-1 & \text{при } x\leqslant -2;\\ 3 & \text{при } -2\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x+1 & \text{при } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Графиком является ломаная, состоящая из трех звеньев (черт. 185).



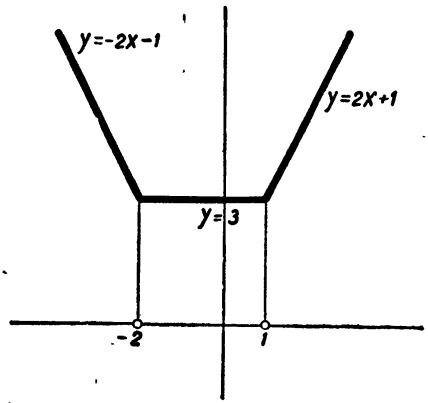
Черт. 183.



Черт. 184.

10. Построить график $y=\lg_a x^2$ (где $a>1$). Область определения — множество всех действительных чисел, отличных от нуля, т. е. множество двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Функция четная. Исследуем ее в интервале $(0, \infty)$. При $x>0$ имеем $\lg_a x^2=2\lg_a x$. Следовательно, в интервале $(0, \infty)$ график (черт. 186) может быть получен растяжением графика $y=\lg_a x$ (пунктирная линия) в 2 раза от оси абсцисс.

Заметим, что функции $\lg x^2$ и $2\lg x$ не тождественны в множестве всех действительных чисел. Они тождественны лишь в множестве всех положительных чисел. В самом деле, при $x<0$ первая имеет вполне определенное значение $\lg(-x)^2=\lg x^2$, а вторая теряет смысл.

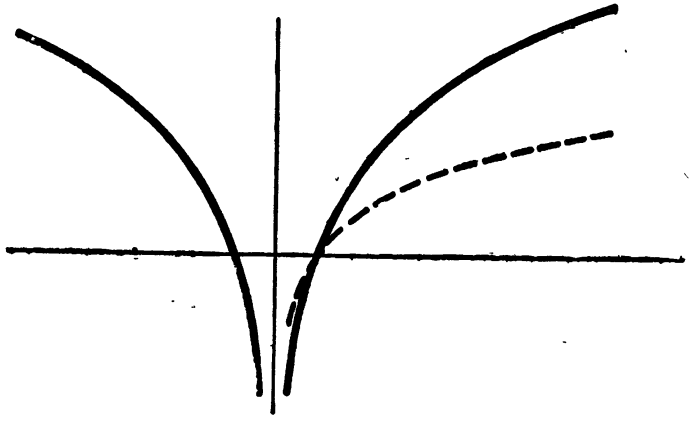


Черт. 185.

11. Построить график $y=\lg_2(1-x^2)$. Из условия $1-x^2>0$, или $x^2<1$, находим область определения данной функции в виде интервала $-1<x<1$. Линия симметрична относительно оси OY, поэтому достаточно исследовать данную функцию в промежутке $0\leqslant x<1$. В этом промежутке $1-x^2$ убывает от 1 до 0, значит, y убывает от 0 до $-\infty$. График представлен на чертеже 187.

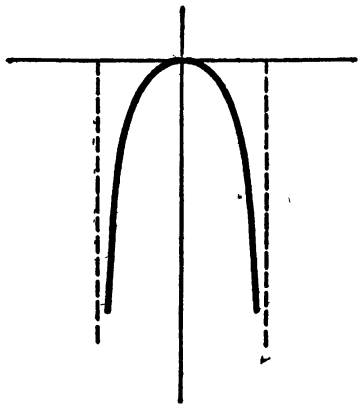
12. Построить график $y=\lg_a(\sin x)$ (где $a>1$).

Область определения находится из условия $\sin x>0$; она состоит из бесконечного множества интервалов $(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$. Функция периодическая



Черт. 186.

с периодом 2π; достаточно исследовать ее в интервале $0<x<\pi$, приняв во внимание, что сегмент $[\pi, 2\pi]$, на котором $\sin x\leqslant 0$, не принадлежит области определения. В промежутке $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ (первая четверть) $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а $y=\lg\sin x$ возрастает от $-\infty$ до 0. В промежутке $\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi$ (вторая четверть) $\sin x$ убывает от 1 до 0, а $\lg\sin x$ убывает от 0 до $-\infty$. Заметим, что из условия $\sin x\leqslant 1$ следует, что $y\leqslant 0$ и что $y=0$ $\left(\text{при } x=\frac{\pi}{2}\right)$ есть наибольшее значение функции. График представлен на чертеже 188. Рекомендуем учащимся составить таблицу значений функции $\lg_{10}\sin x$ при значениях аргумента $x=0,0{,}1,0{,}2$ и т. д., пользуясь таблицами логарифмов тригонометрических функций.

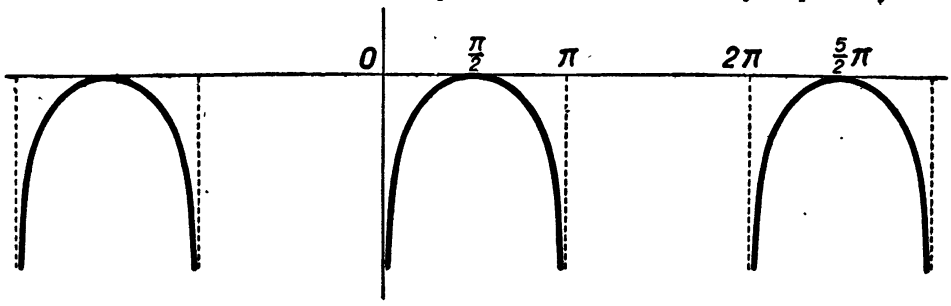


Черт. 187.

13. Построить график $y=\sqrt{\lg_a\sin x}$ (где $a>1$). Область определения находится из условия $\lg\sin x\geqslant 0$. Но (предыдущий пример) $\lg\sin x\leqslant 0$, и равенство нулю имеет место лишь в точках $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Поэтому область определения состоит из отдельных точек $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, в которых $y=0$, все же прочие точки не принадлежат области определения функции. График состоит из отдельных точек оси абсцисс (черт. 189).

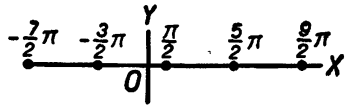
14. Построить график $y=2^{\cos x}$. Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$; на сегменте $0\leqslant x\leqslant\pi$ функция $\cos x$ убывает от 1 до -1; в соответствии с этим y убывает от 2 до $2^{-1}=\frac{1}{2}$. При $x=\frac{\pi}{2}$ имеем $y=1$; на сегменте $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ функция $\cos x$ возрастает от -1 до 1, а y возрастает от $\frac{1}{2}$ до 2. Дальнейшее исследование не представляет интереса, так как y есть периодическая функция с периодом 2π (черт. 190).

15. Построить график $y=\arcsin\frac{1}{x}$. Из условия $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ находим $|x|\geqslant 1$. Следовательно, область определения состоит из двух промежутков:



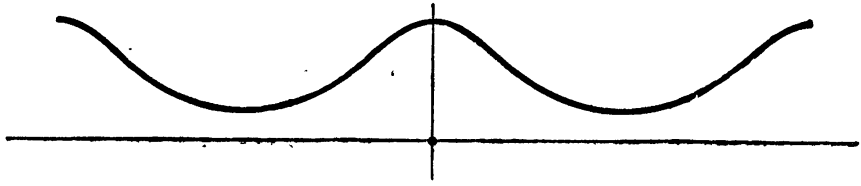
Черт. 188.

$-\infty<x\leqslant -1$ и $1\leqslant x<\infty$; функция нечетная, поэтому достаточно ее исследовать в промежутке $1\leqslant x<\infty$. В этом промежутке $\frac{1}{x}$ убывает от 1 до 0, а y убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. График представлен на чертеже 191. Рекомендуем составить таблицу значений для $x=1, 2, 3, \ldots, 10$.



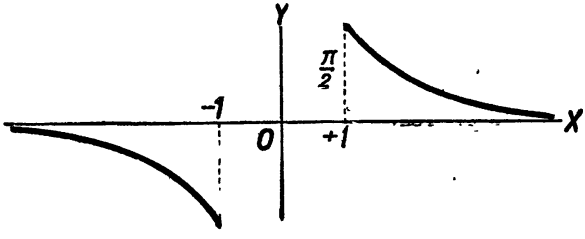
Черт. 189.

16. Построить график $y=\sin(\sin x)$. Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$. Функция нечетная и периодическая с периодом 2π. На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а $y=\sin(\sin x)$ возрастает от 0 до $\sin 1\approx 0{,}84$. На сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ данная функция убывает



Черт. 190.

от $\sin 1$ до 0. График представлен на чертеже 192; пунктиром намечена синусоида. Рекомендуем составить таблицу значений функции через промежутки 0,25.



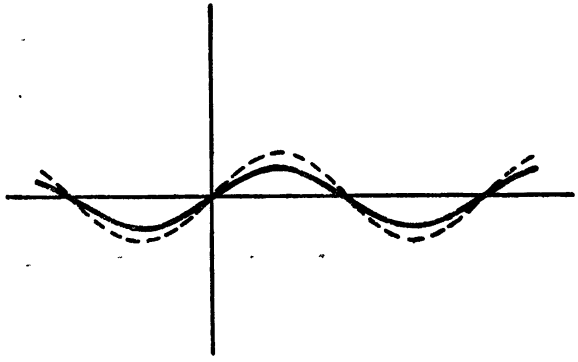
Черт. 191.

17. Построить график $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ (где $a>1$). Функция четная. Исследуем ее при $x\geqslant 0$. Положим $u=a^x$, имеем $u\geqslant 1$ (при $x\geqslant 0$). В промежутке $0\leqslant x<1$ функция $u=a^x$ возрастает от 1 до ∞, следовательно, $y=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$ возрастает (см. выше пример 4) от 1 до ∞. График (цепная линия) представлен на чертеже 193.

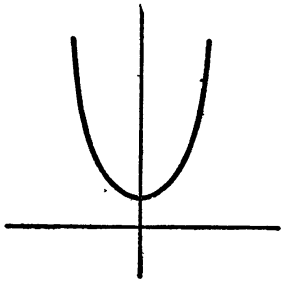
18. Построить график $y=\sin x^2$ (кривая Френеля). Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$. На сегменте $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1{,}25$ функция x^2 возрастает

от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а потому y возрастает от 0 до 1. На сегменте $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi} \approx 1{,}77$ функция x^2 возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π, а y убывает от 1 до 0. На сегменте $\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}\pi} \approx 2{,}25$ функция x^2 возрастает от π до $\frac{3}{2}\pi$, а y убывает от 0 до -1 и т. д. Имеем $y = 0$ при

$$x = \pm 0, \ \pm\sqrt{\pi}, \ \pm\sqrt{2\pi}, \ \ldots, \ \pm\sqrt{k\pi}, \ \ldots .$$



Черт. 192.

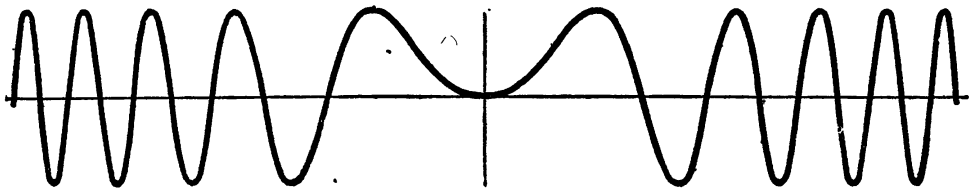


Черт. 193.

Заметим, что последовательность расстояний между соседними точками пересечения графика с осью абсцисс имеет предел, равный нулю:

$$\lim\left[\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right] = \lim \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = 0.$$

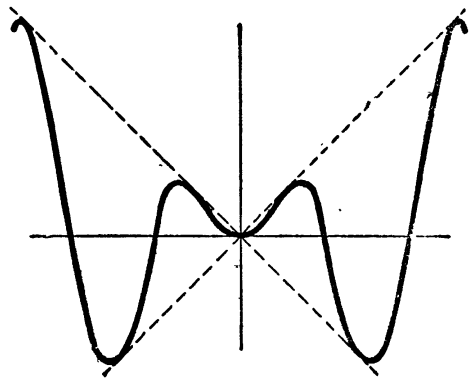
Неравенство $|\sin x^2| \leqslant x^2$ показывает, что (в окрестности точки 0) линия расположена между параболой $y = x^2$ и осью OX. График представлен на чертеже 194.



Черт. 194.

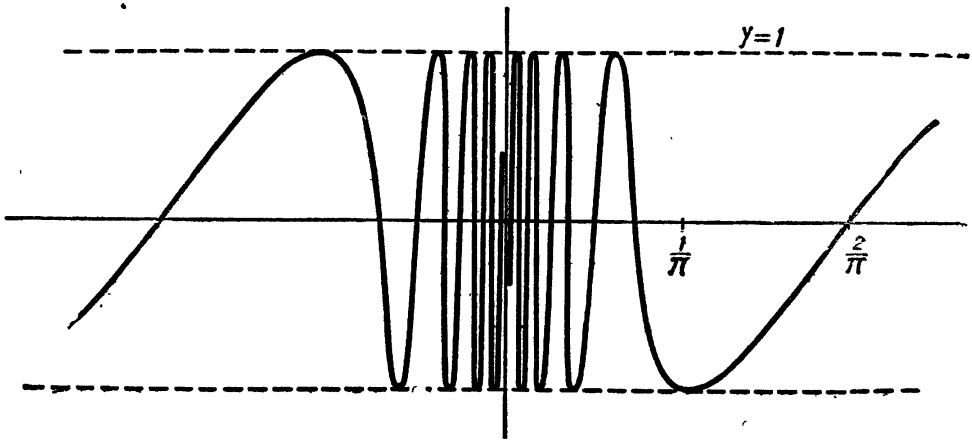
19. Построить график $y = x \sin x$. Область определения — интервал $(-\infty, \infty)$. Функция четная, поэтому достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$. Неравенства $-x \leqslant x \sin x \leqslant x$ показывают, что линия заключена между прямыми $y = \pm x$ — биссектрисами координатного угла. При этом точки линии, соответствующие значениям $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, в которых $\sin x = 1$, лежат на биссектрисе $y = x$, а точки, соответствующие значениям $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, — на

биссектрисе $y=-x$. При $x>0$ значение y положительно (отрицательно) в тех же интервалах, в которых синус положителен (отрицателен). В точках $x=k\pi$ график пересекает ось абсцисс. Из неравенства $x\sin x<x^2$ следует, что в окрестности начала координат линия расположена между параболой и осью абсцисс. График представлен на чертеже 195.



Черт. 195

20. Построить график $y=\cos\frac{1}{x}$. Область определения состоит из двух интервалов: $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Функция четная, достаточно исследовать ее в интервале $(0, \infty)$. В промежутке $\frac{1}{\pi}\leqslant x<\infty$ функция $u=\frac{1}{x}$ убывает от π до 0, а $y=\cos u$ возрастает от -1 до 1. На сегменте $\frac{1}{2\pi}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\pi}$ функция $u=\frac{1}{x}$ убывает от 2π до π, а y убывает от 1 до -1. На сегменте $\frac{1}{3\pi}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2\pi}$ функция u убывает от 3π до 2π, а y возрастает от -1 до 1 и т. д. Неравенства $-1\leqslant\cos\frac{1}{x}\leqslant 1$ показывают, что линия заключена в полосе, ограниченной прямыми $y=\pm 1$, при этом $y=1$ в точках $x=\frac{1}{2k\pi}$;



Черт. 196.

$$y=-1 \text{ в точках } x=\frac{1}{(2k+1)\pi}$$

и

$$y=0 \text{ в точках } x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}.$$

График представлен на чертеже 196.

Глава XII

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 114. Элементарные трансцендентные уравнения

Под элементарными трансцендентными (или, кратко, трансцендентными) уравнениями мы будем подразумевать уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — элементарная трансцендентная функция. Примерами трансцендентных уравнений могут служить:

$$2^x - x + 2 = 0, \quad \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = 2\cos x,$$
$$\lg(x^2 - 1) + x^x - x\cos x = 2 \text{ и т. п.}$$

Множество решений трансцендентного уравнения может быть для разных уравнений весьма различным, оно может являться конечным, в частности пустым (уравнение не имеет решений) или бесконечным множеством чисел.

В общем случае *трансцендентное уравнение не может быть решено элементарными средствами.* Это значит, что нельзя установить правила, позволяющего получить каждое решение уравнения путем последовательного выполнения ряда арифметических действий и элементарных операций над данными, считающимися известными числами (коэффициенты, параметры и пр.). Однако в частных случаях (сравнительно редких) такое правило может быть установлено. В ряде случаев все множество решений уравнения может быть задано при помощи формулы, содержащей арифметические действия и элементарные операции над данными числами и параметрами, так что каждому (допустимому) значению параметра (или допустимой системе значений нескольких параметров) соответствует некоторое вполне определенное „частное" решение уравнения. В каждом таком случае формулу, представляющую множество всех решений данного уравнения, называют его „общим" решением. Иногда „общее решение" может быть задано при помощи нескольких формул.

Многообразие различных видов элементарных трансцендентных уравнений и приемов их решения (если таковое может быть выполнено элементарно) делает затруднительным установление достаточно целесообразной классификации этих уравнений. В школьном курсе элементарной алгебры и тригонометрии под названиями показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений рассматриваются различные частные виды трансцендентных уравнений.

В дальнейшем эти названия мы будем применять к различным конкретным видам трансцендентных уравнений, которые будут рассматриваться.

Примечание. Точное определение понятия, например, показательного или тригонометрического уравнения, было бы плодотворным, если бы выделение класса уравнений, носящих данное название, связывалось с установлением общих методов их

исследования и решения. На самом же деле речь идет о различных весьма частных видах трансцендентных уравнений и специальных приемах их решения, так что установление дробной классификации в соответствии с этими приемами не явится целесообразным *.

§ 115. Простейшие трансцендентные уравнения.

Простейшим трансцендентным уравнением будем называть уравнение вида

$$f(x)=c,$$

где $f(x)$ — основная элементарная трансцендентная функция.

Таким образом, *решение простейшего уравнения есть нахождение всех значений аргумента, при которых данная основная функция имеет заданное числовое значение c.*

Ниже приводится решение основных трансцендентных уравнений.

1° Уравнение $a^x=c$, где $a>0$ и $a\neq 1$, имеет единственное решение: $x=\lg_a x$ при $c>0$. Если $c\leqslant 0$, то уравнение не имеет решений, так как значение показательной функции не может быть отрицательным или равным нулю.

2° Уравнение $\lg_a x=c$ (где $a>0$ и $a\neq 1$) при любом действительном c имеет единственное решение: $x=a^c$.

3° Уравнение $x^\alpha=c$ (α — иррациональное число) при $c>0$ имеет единственное решение: $x=c^{\frac{1}{\alpha}}$.

4° Уравнение $\cos x=c$ при $|c|\leqslant 1$ имеет бесконечное множество решений, при $|c|>1$ не имеет решений. Если $|c|\leqslant 1$, то на сегменте $[0, \pi]$ уравнение имеет единственное решение: $x_1=\arccos c$. Дуга $-\arccos c$ также является решением данного уравнения. Таким образом, дуги $x_1=\arccos c$ и $x_2=-\arccos c$ суть два решения данного урав-

* Принятые во многих старых учебниках „определения" нельзя признать удачными. Например, под определение тригонометрического уравнения, как содержащего неизвестное под знаком тригонометрических функций, подойдут многие уравнения, неразрешимые элементарными средствами. Примером может служить уравнение:

$$\sin x+x+1=0,$$

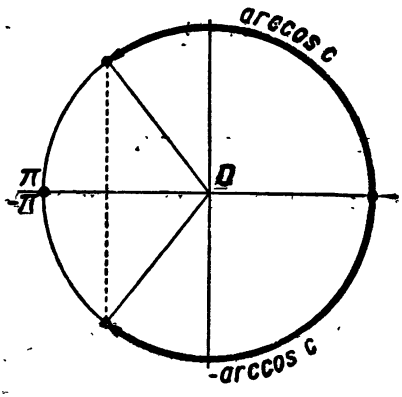
линейное относительно x и $\sin x$, которое обычно не называют тригонометрическим. Однако даже в школьном задачнике система линейная относительно x, y, $\sin x$, $\sin y$:

$$\sin x+\sin y=a,\quad x+y=b$$

приводится среди тригонометрических уравнений.

Вопрос о том, следует или не следует данное уравнение, содержащее, например, тригонометрические функции, считать тригонометрическими, не имеет принципиального значения. И нет никаких неудобств, когда этот термин применяется к тем уравнениям, которые в данном конкретном случае рассматриваются.

нения, содержащиеся на сегментах от $-\pi$ до π (черт. 197). Так как этот сегмент охватывает полный период косинуса, то множество всех искомых дуг найдем, прибавляя к x_1 и x_2, любое целое число полных окружностей:



Черт. 197.

$$\arccos c + 2k\pi \quad \text{и} \quad -\arccos c + 2k\pi.$$

Объединяя оба выражения в одно, запишем:

$$x = \pm \arccos c + 2k\pi,$$

где k — целочисленный параметр.

5° $\sin x = c$. При $|c| \leqslant 1$ это уравнение имеет бесконечное множество решений, а при $|c| > 1$ не имеет решений. Если $|c| \leqslant 1$, то

$$x_1 = \arcsin x \quad \text{и} \quad x_2 = \pi - \arcsin c$$

суть два решения данного уравнения, заключенные (соответственно) на сегментах:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x_2 \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

Сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ охватывает период синуса, а поэтому выражения

$$x_1 + 2k\pi = \arcsin c + 2k\pi \qquad (1)$$

и

$$x_2 + 2k\pi = (\pi - \arcsin c) + 2k\pi = -\arcsin c + (2k+1)\pi \qquad (2)$$

в совокупности дают множество всех решений данного уравнения. Полученные выражения можно объединить одной формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin x + n\pi,$$

где n — любое целое число. При n четном получим (1), при n нечетном получим (2).

6° $\operatorname{tg} x = c$. При любом действительном c уравнение имеет в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ единственное решение. Но этот интервал охватывает полный период тангенса, а поэтому общее решение запишется так:

$$x = \operatorname{arc\,tg} c + k\pi.$$

7° $\operatorname{ctg} x = c$. При любом действительном c уравнение имеет единственное решение в интервале $(0, \pi)$:

$$x = \operatorname{arc\,ctg} c.$$

Общее решение записывается в виде:

$$x = \operatorname{arc\,ctg} c + k\pi.$$

8° Простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции, имеют вид:

$$\arcsin x = c,\ \arccos x = c,\ \operatorname{arc\,tg} x = c,\ \operatorname{arc\,ctg} x = c.$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение, если значение c содержится в том же промежутке, которому принадлежит значение соответствующей аркфункции. Так, например, первое уравнение имеет единственное решение: $x = \sin c$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $|c| > \frac{\pi}{2}$, то это уравнение не имеет решений.

На нижеследующих примерах пояснено решение трансцендентных уравнений, непосредственно приводящихся к простейшим.

Примеры.

1. $\lg_2(5x+1) = 3.$

Решение. $5x+1 = 2^3$, откуда $x = \frac{7}{5}$.

2.

$$\sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad \text{откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}.$$

3.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}.$$

Решение.

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{4}{5} + 2k\pi.$$

По таблицам находим $\arccos\frac{4}{5} \approx 36°52'$.

Следовательно (в градусной мере),

$$x \approx \pm 36°\ 52' - 45° + 2k360°.$$

4.

$$3 \arcsin\sqrt{x} - \pi = 0.$$

Решение. $\sqrt{x} = \sin\frac{\pi}{3}$, откуда $x = \frac{3}{4}$.

§ 116. Различные частные приемы решения трансцендентных уравнений

1. Пусть $u(x)$ некоторая трансцендентная функция, $F(u)$ — алгебраическая функция аргумента u. Уравнение

$$F(u(x)) = 0 \qquad (1)$$

при помощи подстановки $t=u(x)$ преобразуется в алгебраическое уравнение относительно нового неизвестного t:

$$F(t)=0.$$

Если $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — действительные корни этого уравнения, то решение уравнения (1) сводится к решению k трансцендентных уравнений:

$$u(x)=t_1,\ u_2(x)=t_2,\ \ldots\ ,u(x)=t_k.$$

В частности, этот прием применяется к решению показательных уравнений вида:

$$c_n a^{nx}+c_{n-1}a^{(n-1)x}+\ldots+c_1a^x+c_0=0. \qquad (2)$$

Положив $t=a^x$, получим алгебраическое уравнение:

$$c_n t^n+c_{n-1}t^{n-1}+\ldots+c_1t+c_0=0. \qquad (3)$$

Если t_i — один из действительных корней последнего уравнения, то для соответствующего решения уравнения (2) получим простейшее уравнение:

$$a^x=t_i,\ \text{откуда}\ x=\lg_a t_i.$$

Достаточно взять лишь положительные корни уравнения (3), так как если $t_i\leqslant 0$, то соответствующее простейшее уравнение не имеет решений.

Пример 1.
Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=m.$$

Решение. Положив $a^x=t$, получим (после несложных преобразований) квадратное уравнение:

$$t^2-2mt+1=0,$$

корни которого суть:

$$t_1=m+\sqrt{m^2-1}\ \text{и}\ t_2=m-\sqrt{m^2-1}.$$

При $|m|<1$ корни мнимые, при $m<0$ оба корня отрицательные, при $m>1$ оба корня положительные. Данное уравнение имеет два различные решения при $m>1$:

$$x=\lg_a(m+\sqrt{m^2-1})\ \text{и}\ x_2=\lg_a(m-\sqrt{m^2-1});$$

одно решение $x=1$ при $m=1$ и не имеет решений при $m<1$ (объяснить результат на основе исследования, проведенного на стр. 359, пример 17).

Способ подстановки применяется к решению тригонометрических уравнений вида:

$$R(\sin x,\ \cos x)=0, \qquad (R)$$

где $R(\sin x,\ \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$ (уравнение может содержать $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$, но они рационально выражаются

через $\sin x$ и $\cos x$). Применив к левой части рационализирующую подстановку (§ 103), получим алгебраическое уравнение:

$$R_1(t)=0, \qquad (R_1)$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция относительно неизвестного t. Согласно изложенному в § 103, рационализация всегда может быть достигнута при помощи универсальной подстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Применение этой подстановки может привести к потере корней.

В самом деле, функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ определена для всех действительных значений $x\neq(2k+1)\pi$, поэтому универсальной подстановкой можно найти все решения уравнения (R), кроме решений вида $x=(2k+1)\pi$ (если последние существуют).

Наиболее существенные случаи применения других рационализирующих тригонометрических подстановок указаны в § 103.

Тригонометрическое уравнение (R) можно свести к алгебраическому, если выразить различные содержащиеся в нем тригонометрические функции через одну и принять последнюю за новое неизвестное. Однако выражения тригонометрических функций друг через друга содержат радикалы, и освобождение от них полученного уравнения может внести посторонние решения.

Примеры.

2. Решить уравнение

$$a\sin x+b\cos x+c=0 \quad (\text{где } a\neq 0 \text{ и } b\neq 0).$$

Решение. Применив универсальную подстановку, после элементарных преобразований получим квадратное уравнение:

$$t^2(c-b)+2at+(b+c)=0. \qquad (4)$$

Значения $x=(2k+1)\pi$ (которые не могут быть получены универсальной подстановкой) удовлетворяют данному уравнению, если $-b+c=0$.

Исследованию подлежат два случая:

1° $b\neq c$. В этом случае квадратное уравнение в поле комплексных чисел имеет два решения:

$$t=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b}.$$

Если $a^2+b^2\geqslant c^2$, то квадратное уравнение имеет действительные корни, в этом случае из соотношения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ получим $\frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}t+k\pi$ и окончательно:

$$x=2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b}+k\pi\right),$$

где k — целочисленный параметр.

Если $c^2>a^2+b^2$, то исходное уравнение не имеет решений, так как корни уравнения (4) мнимые.

2° $b=c$. В этом случае данное уравнение имеет решения вида $x=(2k+1)\pi$. Уравнение (4) обращается в уравнение 1-й степени, из которого находим вторую серию решений:

$$x=2\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)+k\pi\right].$$

3. Решить уравнение:

$$3-7\cos^2 x\sin x-3\sin^3 x=0.$$

Решение. Левая часть содержит лишь четные степени косинуса, поэтому для рационализации достаточно положить $t=\sin x$. После подстановки получим кубическое уравнение:

$$4t^3-7t+3=0,$$

имеющее три действительные корня:

$$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2}\ \text{ и }\ t_3=-\frac{3}{2};$$

Из трех простейших уравнений:

$$\sin x=1,\ \sin x=\frac{1}{2}\ \text{ и }\ \sin x=-\frac{3}{2}$$

третье не имеет решений; решая первые два, получим общее решение данного уравнения:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ и } x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x+\cos x=1. \tag{5}$$

Решение. Имеем $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Полагая $\sin x=t$, получим иррациональное уравнение:

$$t\pm\sqrt{1-t^2}=1. \tag{6}$$

Освобождаясь от радикала получим:

$$2t^2-2t=0,$$

откуда $t_1=0$, $t_2=1$.

Значение $t_1=\sin x=0$ удовлетворяет уравнению (5) при $\cos x=1$. Следовательно, решению $t_1=0$ соответствует положительное значение радикала. Решения уравнения (5), соответствующие корню y_1, суть $x=2k\pi$, так как из общей формулы $x=\arcsin 0+n\pi$ следует исключить нечетные значения n, дающие для косинуса значение, равное -1. Значение $y_2=1$ удовлетворяет уравнению (6), откуда находим $\sin x=1$ или

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}[2n+(-1)^n].$$

Заметим, что $2n+(-1)^n=4k+1$, будет ли n четным числом: $n=2k$, или нечетным: $n=2k+1$, а потому $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Итак, имеем две серии решений: $x=2k\pi$ и $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Однородным тригонометрическим уравнением называют уравнения вида:

$$P(\sin x,\ \cos x)=0,$$

где левая часть есть однородный многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$ приводит к алгебраическому уравнению. Этой подстановкой могут быть найдены все решения, кроме решений вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (если они имеются).

Пример 5. Решить однородное уравнение 3-й степени:

$$\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0.$$

Решение. При $\cos x = 0$ уравнение не удовлетворяется *.

Разделив обе части на $\cos^3 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Полагая $\operatorname{tg} x = t$, получим кубическое уравнение:

$$t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0,$$

имеющее корни $t = 1$ и $t = \pm \sqrt{3}$, откуда:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ и } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Ниже даны примеры уравнений, приводящихся к однородным.

1° $$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

Достаточно правую часть заменить на $d(\cos^2 x + \sin^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

2° $$a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \cos^3 x \sin x = d.$$

Достаточно правую часть заменить на $d(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$, чтобы получить однородное уравнение 4-й степени.

3° $$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos 2x + d \cos^2 x = e.$$

Достаточно преобразовать $\sin 2x$ и $\cos 2x$ и заменить e на $e(\sin^2 x + \cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

II. При решении показательных и логарифмических уравнений часто применяется операция логарифмирования и потенцирования обеих частей. В общем случае выполнение этих операций может привести к уравнению, не эквивалентному исходному. Рассмотрим два уравнения:

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{(I)}$$

и

$$\lg f(x) = \lg \varphi(x) \quad \text{(II)}$$

(основание логарифмов — любое положительное число $a \neq 1$). Множество допустимых значений неизвестного для уравнения (I) есть

---

* Если положить $\cos x = 0$, то получим $\sin^3 x = 0$ и, следовательно, $\sin x = 0$, но равенства $\sin x = \cos x = 0$ не могут выполняться ни при каком значении x. Если бы в уравнении не содержался член $c \sin^3 x$, то можно было бы предварительно вынести общий множитель, равный $\cos x$, и приравнять его отдельно к нулю.

общая часть областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, а множество допустимых значений x для уравнения (II) должно удовлетворять дополнительным условиям

$$f(x) > 0, \quad \varphi(x) > 0.$$

Следовательно, при переходе от уравнения (I) к уравнению (II) (т. е. при логарифмировании уравнения) будут утрачены те его решения (если они существуют), при которых обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не положительны. При переходе от уравнения (II) к (I) (т. е. при потенционировании), наоборот, эти решения уравнения (I) появляются в качестве посторонних для уравнения (II).

Пример 6.
Уравнение $x^3 = x$ имеет три действительные корня -1, 0 и 1. Логарифмируя, получим уравнение $3 \lg x = \lg x$, имеющее единственное решение $x = 1$.

Если в уравнении (I) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ алгебраические, то корни логарифмического уравнения (II) содержатся в множестве корней алгебраического уравнения (I). Для решения уравнения (II) достаточно решить алгебраическое уравнение (I) и подвергнуть проверке его корни.

Если, в частности, обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ положительны, то уравнения (I) и (II) эквивалентны. В самом деле, логарифмы двух положительных чисел (значения функций f и φ) равны тогда и только тогда, когда равны эти числа. В частности, показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$$

эквивалентно уравнению

$$f(x) = \varphi(x).$$

Последнее уравнение алгебраическое, если функции f и φ алгебраические. В данном случае логарифмирование (по основанию a) сводится к приравниванию показателей. Логарифмирование обычно применяется к решению уравнений вида:

$$ka^{f(x)} = mb^{\varphi(x)}.$$

К нарушению эквивалентности данного и преобразованного уравнений может привести формальное применение тождеств, имеющих место не во всем множестве действительных чисел, а в некоторой его части.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\lg f(x) + \lg \varphi(x) = \lg \psi(x).$$

Воспользовавшись (формально) теоремой о логарифме произведения, получим:

$$\lg [f(x) \varphi(x)] = \lg \psi(x).$$

Последнее уравнение, вообще говоря, не эквивалентно данному. В самом деле множество допустимых значений неизвестного для первого уравнения определяется неравенствами:

$$f(x)>0, \quad \varphi(x)>0, \quad \psi(x)>0,$$

а для второго неравенствами $f(x)\cdot\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$. Левые части обоих уравнений тождественны лишь на первом множестве.

Примеры.

7. Решить уравнение $\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{3}$.

Решение. Представив обе части в виде степеней числа 3, получим:

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}}, \text{ откуда } x(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Уравнение имеет два решения:

$$x_1=\frac{3}{2} \text{ и } x_2=-\frac{1}{2}.$$

8. Решить уравнение

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

Решение. Запишем уравнение при помощи степеней чисел 2 и 3 так:

$$2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1},$$

откуда:

$$3\sqrt{3}\cdot 2^{2x}=8\cdot 3^x.$$

Логарифмируя (при произвольном основании), получим:

$$\frac{3}{2}\lg 3+2x\lg 2=3\lg 2+x\lg 3,$$

откуда:

$$x=\frac{3}{2}.$$

9. Решить уравнение

$$x^x=x.$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестного есть множество положительных чисел. Так как при $x>0$ обе части уравнения положительны, то, логарифмируя, получим эквивалентное уравнение:

$$x\lg x=\lg x,$$

откуда:

$$(x-1)\lg x=0 \text{ и } x=1.$$

При формальной подстановке $x=-1$ обе части данного уравнения имеют одно и то же значение -1. Однако здесь не имеет места потеря корня. В самом деле, число -1 не принадлежит области определения функции x^x, а потому не есть корень данного уравнения в поле действительных чисел

10. Решить уравнение

$$\lg(x-1)+\lg(x-2)=\lg(x+2). \qquad (7)$$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений неизвестного определения неравенствами

$$x-1>0,\quad x-2>0,\quad x+2>0,$$

откуда $x>2$. Преобразуя левую часть, получим:

$$\lg[(x-1)(x-2)]=\lg(x+2). \qquad (8)$$

Множество допустимых значений x определяется неравенствами:

$$(x-1)(x-2)>0,\quad x+2>0,$$

откуда получим два интервала: $-2<x<1$ и $2<x<\infty$. Решения уравнений (7) и (8) содержатся среди корней квадратного уравнения:

$$(x-1)(x-2)=x+2,$$

откуда $x=0$ и $x=4$. Оба корня удовлетворяют уравнению (8). Уравнению (7) удовлетворяет один корень $x=4$. Постороннее решение $x=0$ появилось при переходе от уравнения (7) к уравнению (8), который повлек за собой изменение области определения левой части.

11. Решить систему уравнений

$$x^y=y^x,\ a^x=b^y \text{ (где } a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1).$$

Р е ш е н и е. Множество допустимых значений x и y определяется условиями $x>0$, $y>0$. Если $a>1$, $b<1$ или $a<1$, $b>1$, то ни при каких положительных значениях x и y второе уравнение не может удовлетворяться, в этом случае система не имеет решений.

Предположим, что $a>1$, $b>1$ (или что $a<1$ и $b<1$). Логарифмируя уравнения по любому основанию, большему (соответственно меньшему) 1, получим:

$$y\lg x=x\lg y;\quad x\lg a=y\lg b.$$

Подставив выражение для y из второго уравнения в первое, получим (после элементарных преобразований и сокращения на $x>0$):

$$\lg a\lg x-\lg b\lg y=0. \qquad (9)$$

Логарифмируя (повторно) второе уравнение, получим:

$$\lg x-\lg y=\lg\lg b-\lg\lg a\ *. \qquad (10)$$

Уравнения (9) и (10) образуют систему линейных уравнений относительно $\lg x$ и $\lg y$.

Если $\Delta=\lg b-\lg a\neq 0$, то получим:

$$\lg x=\frac{\lg b(\lg\lg b-\lg\lg a)}{\lg b-\lg a}=\lg\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}},$$

откуда:

$$x=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}},\ \text{и аналогично}\ y=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b-\lg a}}$$

(в виде упражнения показать непосредственно, что найденные значения не зависят от выбора основания логарифмов).

---

* $\lg\lg a$ и $\lg\lg b$ имеют смысл, так как, в силу выбора основания логарифмов, $\lg a>0$ и $\lg b>0$.

Если $\Delta = 0$, то $\lg a = \lg b$, откуда $a = b$ и $\lg x = \lg y$. Система имеет бесконечное множество решений $y = x$ (где x — произвольное положительное число).

III. Многообразие различных тригонометрических тождеств является источником многочисленных частных приемов решения тригонометрических уравнений.

Часто можно (перенеся предварительно все члены в левую часть) разложить левую часть уравнения на множители. В этом случае уравнение распадается на несколько уравнений, получающихся поочередным приравниванием нулю сомножителей.

Примеры.

12. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x =$$
$$= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1) = 2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1).$$

Преобразуем правую часть:

$$1 + \cos x + \cos 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x = \cos x (2 \cos x + 1).$$

Перенося все члены в левую часть, перепишем данное уравнение в виде:

$$(2 \cos x + 1) \cos x (2 \sin x - 1) = 0.$$

Приравнивая поочередно нулю три сомножителя, получим:

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ и } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

На нижеследующем примере показан способ решения тригонометрического уравнения посредством введения вспомогательного угла.

13. Решить уравнение:

$$a \cos x + b \sin x = a \cos mx + b \sin mx.$$

Введем вспомогательный угол $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ (см. стр. 352, пункт 5°), тогда получим:

$$\cos (x - \varphi) = \cos (mx - \varphi).$$

Необходимым и достаточным условием равенства косинусов является соотношение:

$$mx - \varphi = \pm (x - \varphi) + 2k\pi,$$

откуда:

$$x = \frac{2k\pi}{m-1} \quad \text{и} \quad x = \frac{2}{m+1}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + k\pi\right)$$

при условии, что $m \neq \pm 1$. Если $m = 1$, то уравнение удовлетворяется тождественно. Если $m = -1$, то уравнение принимает вид $b \sin x = -b \sin x$, откуда (при $b \neq 0$) получим $\sin x = 0$ и $x = k\pi$.

В некоторых случаях целесообразно выполнить преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

14. Решить уравнение:

$$\sin x + 2 \sin x \cos (a - x) - \sin a = 0.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем в сумму средний член:

$$2\sin x\cos(a-x)=\sin a+\sin(2x-a).$$

Уравнение принимает вид:

$$\sin x+\sin(2x-a)=0$$

или

$$2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)=0.$$

Приравнивая поочередно нулю сомножители, получим:

$$x=\frac{1}{3}(a+2k\pi) \quad \text{и} \quad x=a+(4k\pm 1)\pi.$$

Число $4k\pm 1$ может иметь любое нечетное значение, а потому его можно заменить на $2k+1$ и представить вторую серию решений в виде:

$$x=a+(2k+1)\pi.$$

Приведем пример, когда удобно представить уравнение в виде пропорции, а затем образовать производную пропорцию.

15. Решить уравнение:

$$a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)=0,$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$, а значения α и β взяты в пределах от 0 до 2π и $\alpha\neq\beta$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}=-\frac{b}{a}.$$

Если $a\neq -b$, то образуем производную пропорцию:

$$\frac{\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)-\sin(x+\beta)}=-\frac{a-b}{a+b}.$$

Приводя числитель и знаменатель к логарифмическому виду, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{b-a}{a+b}, \tag{11}$$

при условии $\frac{\alpha-\beta}{2}\neq\frac{\pi}{2}$ или $\alpha\neq\pi+\beta$; находим:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{b-a}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и

$$x=-\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{b-a}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2\operatorname{tg}}\right)+k\pi.$$

Если $a=-b$, то уравнение легко решается непосредственным приведением левой части к логарифмическому виду, и в составлении производной пропорции нет надобности.

Если $\alpha=\beta+\pi$, то уравнение принимает вид:

$$a\sin(x+\alpha)-b\sin(x+\alpha)=0,$$

откуда при $a\neq b$, $\sin(x+\alpha)=0$ и $x=-\alpha+k\pi$. При $a=b$ уравнение удовлетворяется всеми значениями x.

Никакими общими правилами невозможно предусмотреть различных искусственных приемов, вносящих упрощения в процесс решения тригонометрических уравнений. Умение применять эти приемы приобретается практикой.

16. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

Р е ш е н и е. Выделим полный квадрат из первых двух членов:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1 + a) = 0.$$

Положив $t = \sin 2x$, получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 2t - 2(a + 1) = 0,$$

имеющее в множестве всех комплексных чисел решения:

$$t = 1 \pm \sqrt{2a + 3}.$$

Найденные значения t действительны, если $2a + 3 \geqslant 0$, откуда $a \geqslant -\frac{3}{2}$. Допустимые значения t определяются условием $|t| \leqslant 1$. Взяв знак $+$ перед радикалом, получим $1 + \sqrt{2a + 3} \geqslant 1$, равенство имеет место лишь при условии $a = -\frac{3}{2}$.

Рассмотрим другой корень: $t = 1 - \sqrt{2a + 3}$. Условие $|t| \leqslant 1$ выполняется, если

$$-1 \leqslant 1 - \sqrt{2a + 3} \leqslant 1,$$

откуда $-2 \leqslant -\sqrt{2a + 3} \leqslant 0$, или

$$0 \leqslant \sqrt{2a + 3} \leqslant 2.$$

Возводя почленно в квадрат, получим:

$$0 \leqslant 2a + 3 \leqslant 4,$$

откуда

$$-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет решение при любом значении a, удовлетворяющем условию $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$:

$$x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2a + 3}) + n\frac{\pi}{2}.$$

17. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Р е ш е н и е. Положим $\sin x + \cos x = t$, имеем:

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x,$$

откуда:

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Данное уравнение примет вид

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

откуда:

$$t = 1 \text{ и } t = -3.$$

Следовательно, получаем два уравнения:

$$\sin x + \cos x = 1 \text{ и } \sin x + \cos x = -3.$$

Первое уравнение было уже решено выше. Второе уравнение не имеет решений, так как каждое из слагаемых в левой части по абсолютной величине не превосходит 1, и в сумме не может получиться число, равное -3.

IV. При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, часто удается в качестве следствия получить алгебраическое уравнение путем выполнения над обеими частями данного уравнения одной и той же тригонометрической операции. Этот прием может привести к появлению посторонних корней. Рассмотрим, например, следующие два уравнения:

$$f(x) = \varphi(x) \tag{I}$$

и

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x). \tag{II}$$

Любое решение уравнения (I) удовлетворяет (II). То же самое уравнение (II) получится, если взять синус обеих частей уравнения

$$f(x) = (-1)^n \varphi(x) + n\pi \tag{12}$$

при любом целом n. Поэтому среди решений уравнения (II), кроме корней уравнения (I), содержатся все корни уравнений вида (12) при любом целом n.

Примеры.

18. Рассмотрим уравнение

$$\pi - \arcsin x = \arccos x.$$

Возьмем синус от обеих частей:

$$\sin(\pi - \arcsin x) = \sin(\arccos x),$$

откуда:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x),$$

или:

$$x = \sqrt{1 - x^2}. \tag{13}$$

Возводя в квадрат обе части, получим: $2x^2 = 1$.

$$\text{откуда } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ есть корень иррационального уравнения, но не есть решение данного уравнения, так как данное уравнение не имеет решений. В самом деле, предположив противное, мы придем к противоречию с тождеством $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. Значение $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет другому уравнению:

$$\arcsin x=\arccos x.$$

Если взять синус от обеих частей этого последнего уравнения, то получится то же самое иррациональное уравнение.

19. Решить уравнение:

$$2\arcsin x+\arccos(1-x)=0.$$

Решение. Имеем:

$$2\arcsin x=-\arccos(1-x).$$

Взяв косинус от обеих частей, получим:

$$\cos(2\arcsin x)=\cos[-\arccos(1-x)],$$

или:

$$(1-x^2)-x^2=1-x,$$

откуда:

$$2x^2-x=0. \tag{14}$$

Данному уравнению удовлетворяет корень $x=0$. Второй корень есть решение другого уравнения:

$$2\arcsin x=\arccos(1-x),$$

приводящего к тому же алгебраическому уравнению (14).

§ 117. Особые случаи решения уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\varphi(x), \tag{1}$$

в котором правая и левая части заданы при помощи некоторых аналитических выражений. Пусть при значении $x=a$ хотя бы одно из выражений $f(x)$ или $\varphi(x)$ утрачивает смысл. Если основываться непосредственно на определении корня уравнения как такого значения аргумента, при котором значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны, то число a нельзя считать принадлежащим множеству допустимых значений неизвестного, а значит нельзя его считать корнем уравнения. Однако в некоторых „особых" случаях оказывается целесообразным расширить понятие корня уравнения. Так, для случая, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ — рациональные функции, было принято соглашение (см. § 65, стр. 189) считать число a корнем уравнения (1), если разность $f(x)-\varphi(x)$ после представления ее в виде несократимой дроби при $x=a$ обращается в нуль, хотя дроби $f(x)$ и $\varphi(x)$, рассматриваемые по отдельности, могут терять смысл в точке a. Принять это определение оказалось возможным, поскольку для всякой рациональной функции существует „каноническое представление" в виде несократимой

дроби. К трансцендентным уравнениям это дополнительное определение корня в „особом случае" неприменимо, так как для трансцендентной функции не определяется понятие (в элементарном курсе) ее канонического представления.

Примем следующее дополнительное определение корня в особом случае.

Определение. *Если в точке a хотя бы одно из выражений $f(x)$ и $\varphi(x)$ теряет смысл и если предел разности $f(x)-\varphi(x)$ в точке a равен нулю:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]=0,$$

то условимся число a считать корнем уравнения (1)*.

Это определение связано с принципом продолжения функции по непрерывности, согласно которому значение функции $f(x)-\varphi(x)$ в точке a (не принадлежащей области определения) следует считать равным нулю, если ее предел в этой точке равен нулю.

Примечание. Следует иметь в виду, что связанное с особыми случаями решения уравнений наивное протаскивание (характерное для старых учебников) всякого рода „раскрытия неопределенностей", „бесконечных корней" и т. п. как чего-то очевидного само по себе, есть глубоко ошибочная, антинаучная точка зрения. В элементарном изложении учения об уравнениях возможно одно из двух: либо, оставаясь на базе первоначального определения, под корнем уравнения подразумевать лишь его корень в первоначальном „узком" смысле и отказаться тем самым от рассмотрения особых случаев; либо расширить понятие корня (в особых случаях) посредством точно сформулированного дополнительного определения.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}. \tag{2}$$

Решение. После формальных преобразований получим:

$$\sin 2x\cdot\sin x(\cos x-1)=0, \tag{3}$$

откуда:

$$x=n\frac{\pi}{2},\quad x=n\pi \quad\text{и}\quad x=2n\pi.$$

Две последние формулы решений содержатся в первой, поэтому формула $x=n\frac{\pi}{2}$ дает общее решение уравнения (3). Переход от уравнения (2) к уравнению (3) был совершен посредством умножения обеих частей (2) на произведение знаменателей, поэтому возможно появление посторонних

* Как нетрудно видеть, в применении к рациональным уравнениям это общее определение не противоречит дополнительному определению, принятому на стр. 189.

решений. Подстановка $x = n\frac{\pi}{2}$ в уравнение (2) показывает, что здесь имеет место особый случай. Именно, при четном $n = 2k$ теряет смысл левая часть, а при нечетном $n = 2k+1$ — правая.

Имеем $\left(\text{при } x \neq n\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \sin x - \operatorname{tg} x.$$

При нечетном n получим:

$$\lim_{x \to \frac{2k+1}{2}\pi} |f(x) - \varphi(x)| = \lim |\sin x - \operatorname{tg} x| = \infty.$$

Следовательно, числа $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ не являются корнями уравнения.

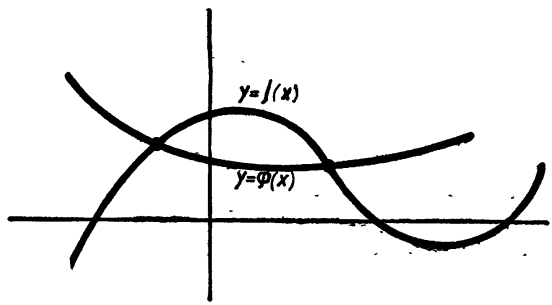
При четном n имеем:

$$\lim_{x \to k\pi} (\sin x - \operatorname{tg} x) = 0.$$

Следовательно, числа $x = k\pi$ не являются корнями в первоначальном „узком" смысле. Однако, приняв дополнительное определение, мы должны считать эти числа корнями уравнения (2).

§ 118. Понятие о графических и приближенных методах решения уравнений

Решение уравнения $f(x) = 0$ можно толковать геометрически как отыскание точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. Если начерчен график функции $f(x)$, то выполняя соответствующие измерения, можно определить искомые корни уравнения. На практике построение графика (пользуясь известными свойствами функции и таблицей ее значений), а также измерение отрезков (линейкой либо на миллиметровой бумаге) могут быть выполнены лишь приближенно. Графический способ решения уравнений „в чистом виде" не обладает большой точностью и может служить лишь для грубых расчетов.



Черт. 198.

Нередко графический способ применяется в следующем виде: представив данное уравнение в виде равенства двух функций

$$f(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

строят отдельно графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и затем при помощи измерений находят абсциссы точек пересечения графиков (черт. 198).

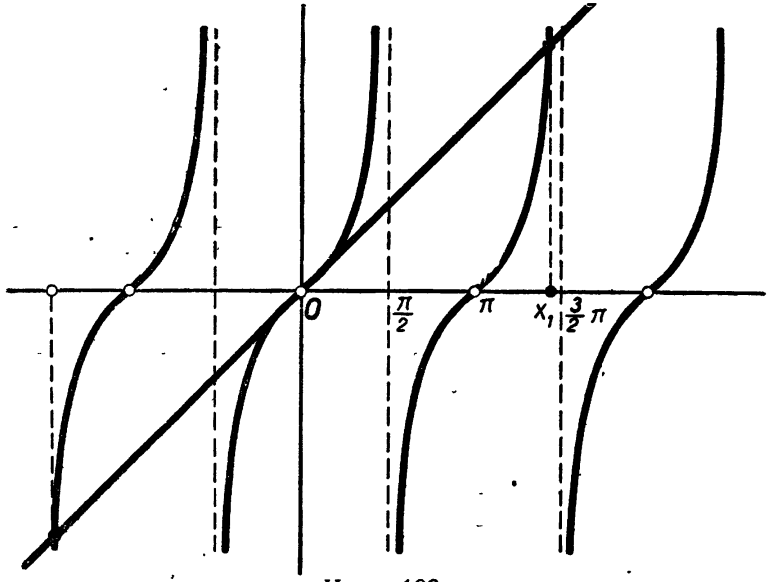
Графический метод играет незаменимую роль в качестве вспомогательного средства, применяемого при приближенном решении урав-

нений. Знание графика функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ нередко позволяет определить число решений уравнения (1), отыскать „в первом приближении" те промежутки, в которых содержатся искомые корни, и определить „примерно" их численные значения. Результаты, полученные графическим путем, подвергаются последующей проверке и уточнению вычислительными методами.

Таким образом, *графические методы во многих случаях помогают наметить путь последующей вычислительной работы.*

Примеры.

1. Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = x$. В силу нечетности данных функций, представляет интерес отыскание лишь положительных корней. Как показывает чертеж 199, уравнение имеет бесконечное множество положительных корней. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ корней нет, ибо $x < \operatorname{tg} x$; первый положительный корень содержится в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, второй в интервале $\left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$, третий в интервале $\left(3\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$ и т. д. k-й корень содержится в интервале $\left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, причем по мере увеличения k корень приближается к $\frac{2k+1}{2}\pi$.

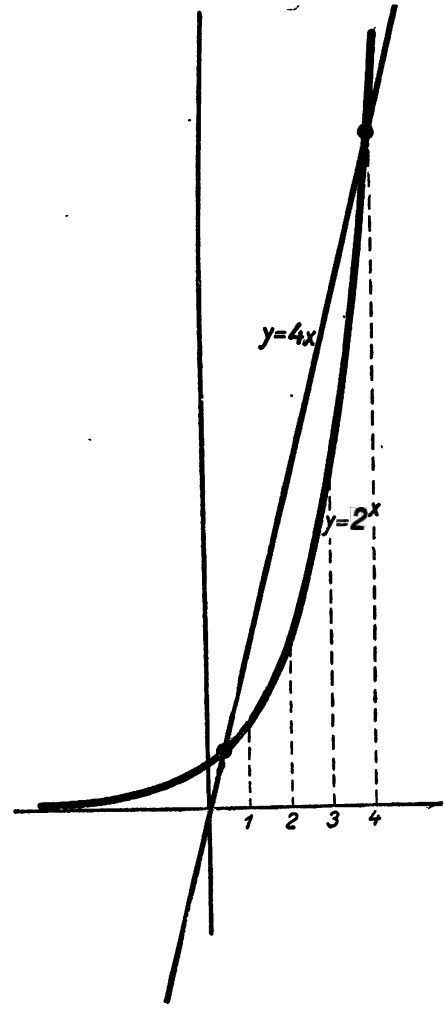


Черт. 199.

2. Определить число корней уравнения $2^x = 4x$. Из чертежа 200, на котором представлены графики функций $y = 2^x$ и $y = 4x$, видно, что уравнение имеет два корня. Большего числа корней не может быть, так как показательная линия всюду вогнута и не может пересекаться с прямой более чем в двух точках. Значение большего корня $x = 4$ находится непосредственно. Второй корень (как показывает чертеж) заключен в интервале (0, 1). Проверим это вычислением, положив $f(x) = 2^x - 4x$; имеем: $f(0) = 1 > 0$, а $f(1) = -2 < 0$. Следовательно (в силу непрерывности), в интервале (0, 1) функция должна обращаться в нуль.

3. Уравнение $\sin x = \frac{1}{x}$ имеет бесконечное множество корней (черт. 201). Первый положительный корень (как видно из чертежа) содержится в интервале $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, $f(1) = \sin 1 - 1 = 0{,}8\ldots - 1 < 0$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$. Последующие корни близки к значениям π, 2π, 3π, ...

4. Рассмотрим уравнение $2^x = x^2$. Наличие двух положительных корней $x = 2$ и $x = 4$ усматривается непосредственно. Других положительных корней нет, ибо при $x > 0$ данное уравнение эквивалентно уравнению $x = 2\lg_2 x$ и линия $y = 2\lg_2 x$, будучи выпуклой, не может иметь более двух точек пересечения с прямой $y = x$. Наличие корня в интервале $(-1, 0)$ ясно из чертежа 202. В самом деле, положив $f(x) = 2^x - x^2$, имеем $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 < 0$, а $f(0) = 1 > 0$.



Черт. 200.

5. Определить число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{100} x$. Определяем сначала число неотрицательных корней. При $x \geqslant 0$ соответствующие точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = \frac{1}{100} x$ должны быть расположены в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $x = 100$, $y = 0$ и $y = 1$. Определим, сколько целых полупериодов синуса содержит сегмент $[0, 100]$. Как показывает несложный расчет: $31\pi < 100 < 32\pi$. Разобьем весь прямоугольник с основанием $[0, 100]$ на 32 прямоугольника, основаниями которых служат сегменты:

$[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ... $[30\pi, 31\pi]$, $[31\pi, 100]$.

Точки пересечения прямой $y = 0{,}01x$ и синусоиды содержатся в прямоугольниках 1-м, 3-м, ..., 31-м по две в каждом. Таким образом, уравнение имеет 32 неотрицательных корня. Уравнение имеет 63 действительных корня, из них 31 положительный, 31 отрицательный и 1 равный нулю (черт. 203, масштабные единицы осей взяты различными).

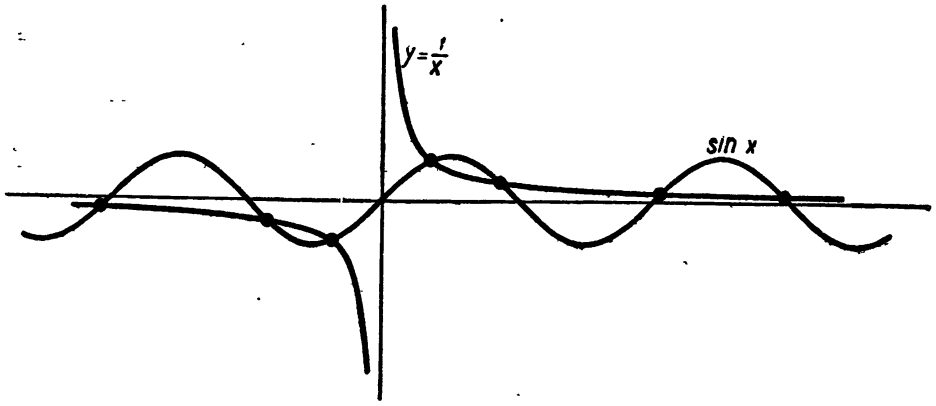
Предположим, что:

1° *найден такой сегмент* $[a, b]$, *внутри которого содержится один единственный корень* $x = \xi$ *уравнения* $f(x) = 0$ (*функция* $f(x)$ *предполагается непрерывной*).

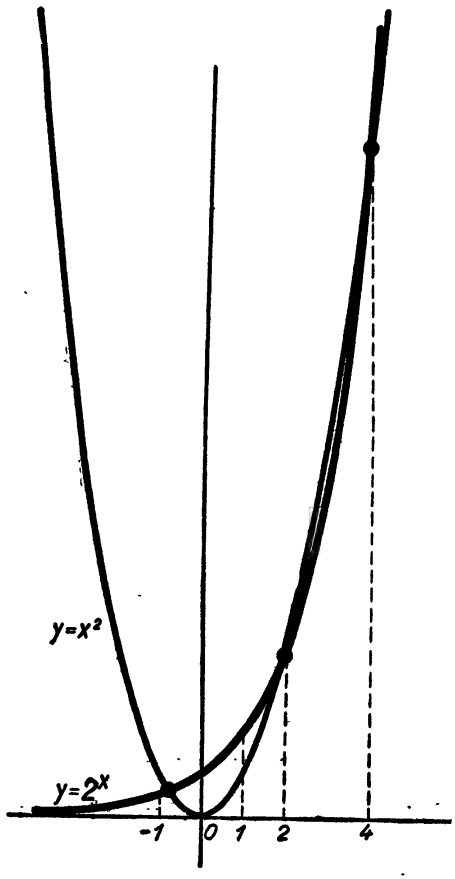
2° *Значение функции* $f(x)$ в *точках* a *и* b *противоположны по знаку.*

Корень ξ *считается отделенным и, если выполнены перечисленные условия* (чертеж 204).

Во многих случаях (см. приведенные выше примеры) отделение корней может быть достигнуто применением графического способа *,



Черт. 201.



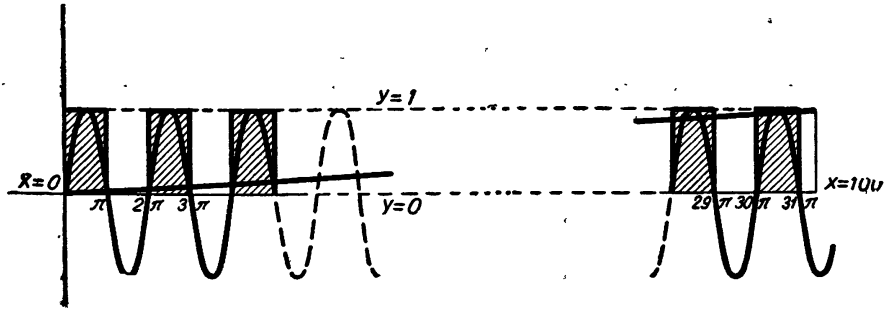
Черт. 202.

Существуют различные методы приближенного вычисления отделенного корня, если точное его значение неизвестно. Эти методы позволяют вычислить корень с любой заданной степенью точности. Изложение наиболее распространенного из этих методов (способ „хорд и касательных“) дано в учебнике высшей математики для учительских институтов (С. П. Виноградов, „Краткий курс высшей математики“).

Ниже мы остановимся на элементарном способе приближенного вычисления корня. Пусть x_1 — любая точка, взятая внутри сегмента $[a, b]$, в частности можно взять его середину $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1)=0$, то $\xi = x_1$, и, значит, корень найден. Допустим, что $f(x) \neq 0$; положим для определенности, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и $f(x_1) < 0$ (черт. 205). В этом случае искомый корень ξ содержится в интервале (x_1, b). Повторяя процесс деления промежутка достаточное число раз, можно получить как угодно малый промежуток, содержащий искомый корень, и тем самым вычислить ξ с любой заданной степенью точности.

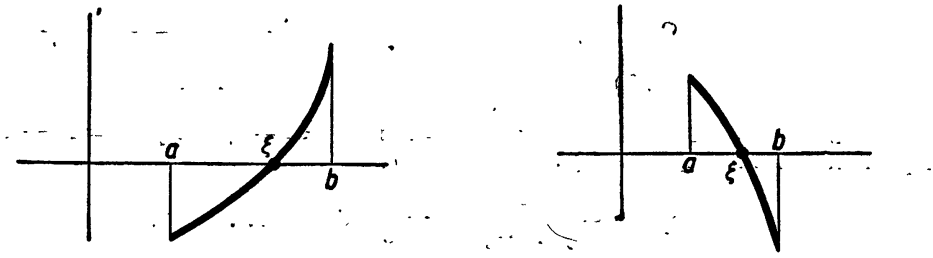
* В курсах высшей алгебры излагаются методы отделения корней многочленов.

К числу элементарных методов относится способ линейной интерполяции, называемый иначе „способом хорд“ или правилом „ложного положения“. Заменим (приближенно) дугу (кривую) $\overset{\frown}{AB}$ графика хордой



Черт. 203.

(черт. 206), тогда абсцисса x_1 точки пересечения хорды AB с осью OX рассматривается как приближенное значение корня ξ.



Черт. 204.

Заменив дугу хордой, мы можем считать приращение функции пропорциональным приращению аргумента:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{f(x_1) - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Но приближенно $\xi = x_1$ (при замене дуги хордой) и $f(x_1) = 0$, откуда:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Поправка Δx, которую надо прибавить к a, чтобы получить x_1, равна:

$$\Delta x = x_1 - a = -\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

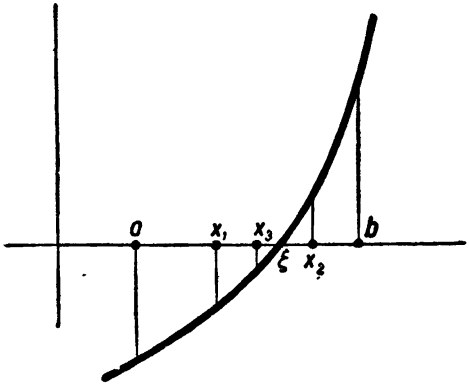
Способ линейной интерполяции можно комбинировать со способом деления промежутка. При вычислениях следует пользоваться имеющимися в распоряжении средствами (таблицы логарифмов, таблицы значений функций, счетная линейка, арифмометр) и руководствоваться общими правилами приближенных вычислений.

Примечание. Великим русским учёным Н. И. Лобачевским был разработан метод численного решения алгебраических уравнений, не требующий предварительного отделения корней. Метод

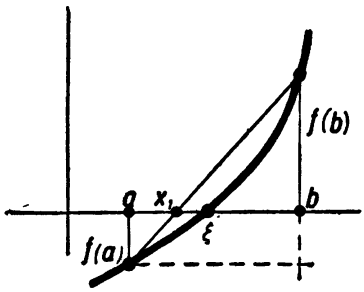
Лобачевского пригоден и для вычисления комплексных корней. Этот метод излагается в специальных курсах приближенных вычислений.

Примеры.

1. Вычислить меньший корень уравнения $2^x = 4x$ с точностью до 0,01. Р е ш е н и е. В примере 2, стр. 380, показано, что искомый корень содер-



Черт. 205.



Черт. 206.

жится в интервале (0,1). Имеем: $f(0) = 1$ и $f(1) = -2$, где $f(x) = 2^x - 4x$. При помощи линейной интерполяции получим:

$$x_1 = 0 - \frac{(1-0)\,f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots.$$

Вычислим значение $f(x_1)$:

$$f(x_1) = \sqrt[3]{2} - \frac{4}{3} = 1{,}2599 - 1{,}3333 = -0{,}0734.$$

Следовательно, искомый корень лежит в интервале $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Так как значение $f\left(\frac{1}{3}\right)$ „близко к нулю", то естественно предположить, что искомый корень близок к $\frac{1}{3}$. Положим $x_2 = 0{,}3$, имеем:

$$f(0{,}3) = 2^{0{,}3} - 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2311 - 1{,}2 = 0{,}0311\ (> 0).$$

Следовательно, корень заключен в интервале (0,3; 0,333; ...). Применим снова линейную интерполяцию:

$$x_3 = 0{,}3 - \frac{(0{,}333\ldots - 0{,}3)\,f(0{,}3)}{f(0{,}33\ldots) - f(0{,}3)} = 0{,}3 - \frac{0{,}0333 \cdot 0{,}0311}{-0{,}0734 - 0{,}0311} = 0{,}3000.$$

Отсюда естественно ожидать, что $x = 0{,}30$ есть искомое приближенное значение корня. Для проверки вычислим $f(0{,}31)$, имеем:

$$f(0{,}31) = 2^{0{,}31} - 0{,}31 \cdot 4 = 1{,}237 - 0{,}24 < 0.$$

Итак, $f(0{,}30) > 0$, а $f(0{,}31) < 0$. Значит $\xi^- = 0{,}30$ и $\xi^+ = 0{,}31$ — искомые приближенные значения корня с недостатком и с избытком.

2. Вычислить приближенно первый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x - x = 0$. В примере 1, стр. 380, показано, что искомый корень содержится в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Заменим данное уравнение эквивалентным уравнением:

$$\sin x - x\cos x = 0,$$

левая часть которого не имеет разрыва на сегменте $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Положим $f(x) = \sin x - x\cos x$. В точке $\frac{5}{4}\pi = 3{,}9250$ $(= 225°)$* (т. е. в середине сегмента) имеем:

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin(225°)\ (1 - 3{,}9250) = 2{,}068\ (> 0)$ и $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 < 0$; следовательно, искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Вычисляем поправку при линейной интерполяции (положив $a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{3}{2}\pi$).

$$\Delta x = -\frac{\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right)\cdot f\left(\frac{5}{4}\pi\right)}{f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}\cdot 2{,}068}{1 + 2{,}068} = 0{,}5292\,(= 30°19').$$

Следовательно, $x_1 = \frac{5}{4}\pi + \Delta x = 4{,}4542\,(= 255°19')$. Вычислим $f(x_1)$; имеем:

$$f(x_1) = \sin(255°19') - 4{,}4542\cdot\cos(255°19') =$$
$$= -\sin 14°41' + 4{,}4542\cdot\cos 14°41' = 0{,}161 > 0.$$

Так как $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$, а $f(4{,}4542) = 0{,}161$, то искомый корень лежит в интервале $\left(4{,}45; \frac{3}{2}\pi\right)$. Значение $f(4{,}4542)$ близко к нулю, поэтому естественно ожидать, что искомый корень ближе к 4,45, чем к $\frac{3}{2}\pi = 4{,}71$. Предлагаем читателю проверить, что $f(4{,}5) < 0$. Искомый корень содержится между 4,45 и 4,5. Более точные вычисления дают $\xi = 4{,}4934\ldots$.

---

* В скобках даны значения аргументов тригонометрических функций в градусах, поскольку распространенные тригонометрические таблицы составлены в градусной мере.